关于 Smarandache 问题研究的新进展

郭晓艳 袁霞著

High American Press 2010

关于**Smarandache**问题研究的新进展

郭晓艳

西北大学数学系

袁 霞

西北大学数学系

High American Press

2010

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

Books on Demand
ProQuest Information & Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road
P.O. Box 1346, Ann Arbor
MI 48106-1346, USA
Tel.: 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/basic

Peer Reviewers:
Wenpeng Zhang, Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, Shannxi , P.R.China.
Wenguang Zhai, Department of Mathematics, Shangdong Teachers' University, Jinan, Shandong , P.R.China.
Guodong Liu, Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou,Guangdong, P.R.China.

Many books can be downloaded from the following **Digital Library of Science**:
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

ISBN: **978-1-59973-096-7**

Standard Address Number : 297-5092
Printed in the United States of America

前　言

数论是一门研究数的规律, 特别是整数性质的科学. 从它产生之日起, 就以语言的简洁, 概念的清晰, 论断的明确有别于其他的科学. 数学王子高斯曾经说过 "数学是科学的女王, 而数论则是数学的女王". 数论是一门古老的数学学科, 古老到它可以追溯到远古时代人们的结绳记事! 然而数论又很年轻, 年轻到我们现在依然无法确定整数的许多简单性质. 虽然有许多古老的数论问题已经被解决, 但是又有更多的新问题不断的出现.

由于许多数论问题的研究最终均可转化为某些数论函数来讨论, 因此对数论函数的研究一直是数论中一个最基本也是最重要的研究课题. 1993 年, 在《Only Problem, Not Solutions!》一书中, 美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache 教授提出了 105 个关于特殊数列、算术函数等未解决的数学问题及猜想. 随着这些问题的提出, 许多学者对此进行了深入的研究, 并获得了不少具有重要理论价值的研究成果.

本书是作者在西北大学攻读学位期间, 根据导师张文鹏教授的建议, 将目前国内学者关于 Smarandache 问题研究的部分成果汇编成册, 其主要目的在于向读者介绍关于 Smarandache 问题的一些最新的研究成果, 主要包括 Smarandache 函数的有界性估计、均值估计, 特殊数列, 特殊函数方程的解等一系列问题. 希望有兴趣的读者可以对这些结论和新问题进行研究, 从而开拓读者的视野, 引导和激发读者对这些领域的研究兴趣.

最后, 对恩师张文鹏教授的全力支持和热情鼓励, 详细审阅全书并提出许多宝贵意见致以深深的谢意!

编者

2010 年 12 月

目录

第一章 关于 Smarandache 函数

初等数论中所包含的一个重要内容就是研究数论函数的各种性质, 而著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 是重要的数论函数之一, 对于这一函数很多学者已经做了研究和探索, 并取得了一系列重要的结果, 这些理论成果对数论发展都有重大意义. 近年来, 关于 Smarandache 函数的有界性估计问题成为 Smarandache 一个新兴的课题, 很多学者对这一课题做了深刻的探索, 本章将介绍近期国内学者们关于 Smarandache 函数的有界性估计问题所作出的最新成果.

1.1 关于 Smarandache 函数的下界估计

1.1.1 引言及结论

定义 1.1. 对于任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是

$$S(n)=\min\{m:\ m\in \mathbf{N},\ n|m!\}.$$

从 $S(n)$ 的定义很容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此我们也不难计算出 $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, $S(17)=17$, $S(18)=6$, $S(19)=19$, $S(20)=5$, $\cdots$. 显然函数 $S(n)$ 既不是递增函数, 也不是递减函数. 关于 $S(n)$ 的进一步性质, 许多学者也进行了研究, 获得了不少有趣的结果, 参阅文献 [2-6]. 例如, 陆亚明 [2] 中研究了方程

$$S\left(m_1+m_2+\cdots+m_k\right)=\sum_{i=1}^{k} S\left(m_i\right)$$

的可解性, 利用解析数论中著名的三素数定理证明了对任意正整数 $k\ge 3$, 该方程有无穷多组正整数解 $(m_1, m_2, \cdots,\ m_k)$.

徐哲峰 [3] 研究了 $S(n)$ 的值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

乐茂华教授在文献 [4] 中研究了 $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$ 的下界估计问题, 并给出了估计式:

$$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)\ge 2p+1,$$

其中 p 为任意奇素数.

苏娟丽 [5] 中改进了文献 [4] 的结论, 给出了更强的下界估计. 即就是证明了对任意素数 $p\ge 7$, 我们有

$$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)\ge 6p+1.$$

苏娟丽 [6] 中还研究了 $S\left(2^p+1\right)$ 的下界估计问题, 证明了对任意素数 $p\ge 7$, 同样可得到估计式

$$S\left(2^p+1\right)\ge 6p+1.$$

以上文献中所涉及的数列 $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ 有着重要的数论背景, 事实上数列 $M_p=2^p-1$ 称为梅森尼数. 梅森尼曾猜测对所有素数 p, M_p 为素数. 然而这一猜测后来被验证是错误的, 因为 $M_{11}=2^{11}-1=23\times 89$ 是个合数. 而数列 $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ 与一个古老的数论难题 — 偶完全数密切相关. 所谓 n 是一个完全数是指 n 的所有正因数之和等于 $2n$. 例如 $n=6$ 是一个完全数, 因为 $12=2\times 6=1+2+3+6$. 人们早已证明一个偶数 n 是完全数当且仅当 $n=2^{p-1}\left(2^p-1\right)$, 其中 2^p-1 为素数. 是否存在奇完全数至今是一个未解决的数论难题. 有关内容可参阅文献 [8] 及 [9].

对于 Smarandache 函数在其它数列上的下界估计, 一些学者也进行了研究, 例如, 王锦瑞 [7] 讨论了 Smarandache 函数在费尔马数上的下界估计问题, 证明了对任意正整数 $n\ge 3$ 有估计式:

$$S(F_n)=S\left(2^{2^n}+1\right)\ge 8\cdot 2^n+1,$$

其中 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 为著名的费尔马数.

最近, 受到文献 [5]、[6] 及 [7] 的启发，温田丁 [10] 研究了有关问题, 获得了更强的下界估计. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 1.1. 对于任意素数 $p \geq 17$, 我们有估计式

(A). $S\left(2^p - 1\right) \geq 10p + 1$;

(B). $S\left(2^p + 1\right) \geq 10p + 1$.

显然定理 1.1 中的下界估计优于文献 [4]、[5]、[6] 及 [7] 中的结论, 而且它的证明过程更具有技巧性.

1.1.2 定理 1.1 的证明

这节我们利用初等方法及组合技巧直接给出定理 1.1 的证明. 我们只证明定理 1.1 中的 (A) 式, 同理可推出定理 1.1 中的 (B) 式. 由 Smarandache 函数的性质知对于任意素数 $p \mid n$, 我们有 $S(n) \geq p$ 且 $p \mid S\left(p^\alpha\right)$ 对所有正整数 α 成立. 现在, 对于任意素数 $p \geq 17$, 设 q 为 $\left(2^p - 1\right)$ 的任一素因子, 显然 $q \geq 5$. 于是由 $S(n)$ 的性质知

$$S\left(2^p - 1\right) \geq q. \tag{1-1}$$

又由于 $q \mid 2^p - 1$, 所以 $2^p \equiv 1 \pmod{q}$. 因此 p 是 2 模 q 的指标. 所以由文献 [8] 及 [9] 中指标的性质知 $p \mid \phi(q) = q - 1$, 或者 $q = mp + 1$. 由于 q 为奇素数, 所以 m 一定为偶数, 因此可设

$$q = 2kp + 1,\ k = 1,\ 2, 3,\ \ \cdots\cdots. \tag{1-2}$$

显然 $2^p - 1$ 不可能是一个完全平方数. 否则有 $2^p - 1 = u^2$, 或者 $2^p = u^2 + 1$, 由此推出 $0 \equiv 2^p \equiv u^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$, 矛盾. 于是 $2^p - 1$ 有下列五种可能:

(a). $2^p - 1$ 为素数, 此时注意到 $p \geq 17$, 我们有 $S\left(2^p - 1\right) \geq 2^p - 1 \geq 10p + 1$.

(b). $2^p - 1$ 恰好为一个素数 q 的 m 次幂, $m \geq 3$. 由于 $2^p - 1$ 不可能为完全平方, 所以 $m = 3, 5, \cdots$. 若 $m \geq 5$, 则此时结合 (1-1) 及 (1-2) 式有

$$S\left(2^p - 1\right) \geq S(q^m) \geq mq > 5(2p + 1) > 10p + 1.$$

若 $m=3$, 则当 $q=2kp+1$ 且 $k\geq 2$ 时仍有

$$S\left(2^{p}-1\right)\geq S(q^{3})\geq 3q>3(4p+1)>10p+1.$$

显然 $2^{p}-1\neq(2p+1)^{3}$, 因为当 $p\geq 17$ 时等式 $2^{p}-1=(2p+1)^{3}$ 不可能成立, 因为 $2^{p}-1>(2p+1)^{3}$, 如果 $p\geq 17$.

(c). $2^{p}-1$ 至少含有四个不同的素因子. 此时由 (1-2) 式可知至少有一个素数满足 $q=2kp+1$ 且 $k\geq 5$, 因为 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数. 此时就有 $S\left(2^{p}-1\right)\geq q\geq 10p+1$.

(d). $2^{p}-1$ 恰好含有三个不同的素因子, 如果其中至少有一个素因子满足 $q=2kp+1$ 且 $k\geq 5$, 那么就有 $S\left(2^{p}-1\right)\geq q\geq 10p+1$. 如果所有素因子中的 $k\leq 4$, 则注意到 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数, $4p+1$ 和 $8p+1$ 不可能同时为素数, 所以可设 $2^{p}-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)^{\beta}\cdot(8p+1)^{\gamma}$. 此时当 $\beta\geq 2$ 或者 $\gamma\geq 2$ 或者 $\alpha\geq 5$ 时定理显然成立. 所以不失一般性可假定 $2^{p}-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)\cdot(8p+1)$, $1\leq\alpha\leq 4$. 这种情况也是不可能的. 因为如果 $2^{p}-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)\cdot(8p+1)$, 则由二次剩余的性质可知 2 是素数 $2p+1$ 及 $6p+1$ 的二次剩余. 然而当 $p\equiv 3 \pmod 4$ 时, 设 $p=4k+3$, 此时 $\left(\frac{2}{6p+1}\right)=(-1)^{\frac{(6p+1)^{2}-1}{8}}=(-1)^{\frac{3p(3p+1)}{2}}=(-1)^{6k+5}=-1$, 这与 2 是素数 $6p+1$ 的二次剩余矛盾. 当 $p\equiv 1 \pmod 4$ 时, 设 $p=4k+1$, 此时 $\left(\frac{2}{2p+1}\right)=(-1)^{\frac{(2p+1)^{2}-1}{8}}=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{2k+1}=-1$，这与 2 是素数 $2p+1$ 的二次剩余矛盾. 所以当 $2^{p}-1$ 恰好含有三个不同的素因子时, 一定有 $S\left(2^{p}-1\right)\geq 10p+1$.

(e). $2^{p}-1$ 恰好含有两个不同的素因子. 此时注意到 (1-2) 式以及 (d) 中的证明过程可知 $2^{p}-1$ 不可能同时含有素因子 $2p+1$ 及 $6p+1$. 同时 $2^{p}-1$ 也不可能同时含有素因子 $2p+1$ 和 $4p+1$, 因为素数 $p>3$ 时, 两个数 $2p+1$ 及 $4p+1$ 中至少有一个被 3 整除, 因此它们不可能同时为素数. 所以由 (1-2) 式知当 $2^{p}-1$ 恰好含有两个不同的素因子时可设: $2^{p}-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(8p+1)^{\beta}$ 或者 $2^{p}-1=(4p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)^{\beta}$, 因为 $4p+1$ 和 $8p+1$ 不可能同时为素数, 其中至少有一个被 3 整除. 显然当 $\beta\geq 2$ 或者 $\alpha\geq 5$ 时有 $S\left(2^{p}-1\right)\geq\beta\cdot(6p+1)\geq 10p+1$ 或者 $S\left(2^{p}-1\right)\geq\alpha\cdot(2p+1)\geq 10p+1$. 当 $\beta=1$, $1\leq\alpha\leq 4$ 时有 $2^{p}-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(8p+1)$ 或者 $2^{p}-1=(4p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)$. 若 $2^{p}-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(8p+1)$, 显然 $\alpha\neq 4$. 否则由 $2^{p}-1=(2p+1)^{4}\cdot(8p+1)$ 立刻推出同余式: $2^{p}-1\equiv-1\equiv(2p+1)^{4}\cdot(8p+1)\equiv 1 \pmod 8$, 矛盾. 而在 $2^{p}-1=(4p+1)^{3}\cdot(6p+1)$ 成立时, 仍然有 $S\left(2^{p}-1\right)\geq$

$3 \cdot (4p+1) > 10p+1$. 所以不妨设 $1 \le \alpha \le 3$. 此时当 $p \ge 17$ 时, 等式 $2^p - 1 = (2p+1)^3 \cdot (8p+1)$ 或者 $2^p - 1 = (4p+1)^2 \cdot (6p+1)$ 不可能成立, 因为 $2^p - 1 > (2p+1)^3 \cdot (8p+1)$ 及 $2^p - 1 > (4p+1)^2 \cdot (6p+1)$. 综合各种可能我们不难推出当 $2^p - 1$ 恰好含有两个不同素因子时, $S(2^p - 1) \ge 10p + 1$.

结合以上五种情况我们立刻完成定理 1.1 中 (A) 式的证明. 类似地, 我们可以推出定理 1.1 中的 (B) 式.

1.2 Smarandache 函数在数列 $a^p + b^p$ 上的下界估计

1.2.1 引言及研究背景

作为上节问题的推广和延伸, 人们自然会想到 Smarandache 函数对任意自然数的下界估计. 然而这是一个十分困难的问题, 因为当 $n = p$ 为素数时, $S(p) = p$; 而当 $n = p^\alpha$ 且 $\alpha \le p$ 时, $S(p^\alpha) = \alpha \cdot p$. 所以 $S(n)$ 的值分布很不均匀. 本节将介绍李粉菊与张文鹏教授在这方面的研究结果, 也就是作为文献 [6] 及 [7] 的注释, 利用初等及组合方法研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 在特殊数列 $a^p + b^p$ 上的下界估计问题, 并得到了一个一般性的结论. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 1.2. 设 $p \ge 17$ 为素数, 则对任意不同的正整数 a 及 b, 我们有估计式

$$S(a^p + b^p) \ge 8p + 1.$$

显然这个定理中的下界是文献 [5] 及 [6] 的推广和延伸, 特别当 $a = 2$, $b = 1$ 时, 我们立刻推出估计式 $S(2^p + 1) \ge 8p + 1$. 因此我们认为利用这节的方法完全可以改进文献 [4]、[5] 中的下界.

1.2.2 定理 1.2 的证明

这节我们利用初等方法给出定理 1.2 的证明. 为叙述方便, 我们首先给出下面的:

引理 1.2.1. 设 p 为奇素数, 则对任意互素的整数 a 及 b 且 $a+b \neq 0$, 我们有

$$\left(\frac{a^p+b^p}{a+b},\ a+b\right)=1 \text{ 或者 } p.$$

证 明: 设 $\left(\frac{a^p+b^p}{a+b},\ a+b\right) = d,\ a+b = dh,\ \frac{a^p+b^p}{a+b} = dk,$ 则 $(h,\ k)=1$ 且

$$\begin{aligned} d^2hk &= a^p+b^p = a^p+(dh-a)^p = \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i (dh)^{p-i}(-1)^i a^i \\ &= pdha^{p-1}+\sum_{i=0}^{p-2} C_p^i (dh)^{p-i}(-1)^i a^i. \end{aligned} \tag{1-3}$$

注意到 $(a,\ b)=1$, d 整除 $a+b$, 所以 $(d,\ a)=1$. 从而由 (1-3) 式立刻推出 $d \mid p$, 所以 $d=1$ 或者 p. 于是完成了引理的证明.

现在我们借助于这个引理来完成定理 1.2 的证明. 因为 a 和 b 为不同的正整数, 所以我们可设 $a = d\cdot a_1$, $b = d\cdot b_1$, $(a_1,\ b_1) = 1$, $a^p+b^p=d^p\cdot(a_1^p+b_1^p)$. 由 Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质知

$$S\left(a^p+b^p\right)=S\left(d^p\cdot(a_1^p+b_1^p)\right)\geq S\left(a_1^p+b_1^p\right). \tag{1-4}$$

于是为证明定理 1.2, 注意到 (1-4) 式, 不失一般性我们可假定 $(a,\ b)=1$, $a\cdot b>1$.

对于任意素数 $q \mid n$, 我们有 $S(n)\geq q$ 且 $q \mid S\left(q^\alpha\right)$ 对所有正整数 α 成立. 现在, 我们先证明 a^p+b^p 不可能为 p 的方幂. 若不然, 则有 $a^p+b^p=p^\alpha$. 由于 p 为奇素数, 当 $\alpha=2$ 时, 由于 $a^p+b^p>2^p>p^2$, 所以 $\alpha\geq 3$, 由前面的引理不难推出 $a+b=p^k u$, $1\leq k\leq \alpha-2$, $(u,p)=1$. 再由

$$\begin{aligned} p^\alpha &= a^p+b^p=a^p+(up^k-a)^p=\sum_{i=0}^{p-1} C_p^i u^{p-i} p^{k(p-i)}(-1)^i a^i \\ &= p^{k+1}ua^{p-1}+\sum_{i=0}^{p-2} C_p^i u^{p-i} p^{k(p-i)}(-1)^i a^i \end{aligned}$$

或者

$$p^{\alpha}-\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i u^{p-i}p^{k(p-i)}(-1)^i a^i=p^{k+1}ua^{p-1}.$$

上式左边能被 p^{k+2} 整除, 但是右边不能, 矛盾! 所以 a^p+b^p 不可能为 p 的方幂. 于是存在素数 $q\neq p$ 且 q 整除 $\dfrac{a^p+b^p}{a+b}$. 即就是

$$a^p+b^p\equiv 0 \pmod q \quad 或者 \quad (a\cdot\overline{b})^p\equiv -1 \pmod q.$$

从而有

$$(a\cdot\overline{b})^{2p}\equiv 1 \pmod q. \tag{1-5}$$

设 m 是 $(a\cdot\overline{b})$ 模 q 的指标, 则由 (1-5) 及指标的性质知 (参阅文献 [8] 及 [9]) $m\mid 2p$. 于是 m 最多有四种可能: $m=1,\ 2,\ p,\ 2p$. 显然 $m\neq 1,\ 2,\ p$. 因为若 $m=1$, 则 $a\equiv b \pmod q$, 与 $(a,\ b)=1$ 且 q 整除 a^p+b^p 矛盾. 若 $m=2$, 则 $a\cdot\overline{b}\equiv -1 \pmod q$ 或者 $a+b\equiv 0 \pmod q$. 与引理及 q 整除 $\dfrac{a^p+b^p}{a+b}$ 矛盾. 再由前面同余式 $(a\cdot\overline{b})^p\equiv -1 \pmod q$ 知 m 不可能等于 p, 所以只有 $m=2p$. 再由指标的性质知 $m\mid\phi(q)=q-1$, 即就是

$$q-1=h\cdot m=h\cdot 2p,$$

或者

$$q=h\cdot 2p+1. \tag{1-6}$$

于是由 (1-6) 式知当 a^p+b^p 除 p 之外, 至少含有 4 个不同的素因子时, 一定有一个素因子 q 使得

$$q=h\cdot 2p+1\geq 4\cdot 2\cdot p+1=8p+1.$$

当 a^p+b^p 含有三个不等于 p 的素因子 q_1, q_2 及 q_3 时, 由 (1-6) 式我们可设 $q_1=2h_1p+1$, $q_2=2h_2p+1$, $q_3=2h_3p+1$ 且 $h_1<h_2<h_3$. 此时 h_1 和 h_2 不可能同时为 1 和 2. 若不然, 注意到 $p\geq 11$, 则在 p, $p_1=2p+1$ 和 $p_2=4p+1$ 三个素数中, 至少有一个能被 3 整除, 这与 p, q_1 和 q_2 同时为素数矛盾. 因此 h_1, h_2 及 h_3 中至少有一个不妨设 h_3 大于或等于 4, 此时我们有 $q_3=2h_3p+1\geq 8p+1$.

下面我们讨论 a^p+b^p 含有两个不等于 p 的素因子 q 的情况. 此时由函数 $S(n)$ 的性质可知我们最多只需考虑下面两种形式:

$a^p+b^p=p^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 或者 $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(4p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$.

若 $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 成立, 则当 $\beta\geq 4$ 或者 $\gamma\geq 2$ 时, 由 $S(n)$ 的性质可得:

$$S(a^p+b^p)\geq S\left((2p+1)^\beta\right)=\beta\cdot(2p+1)\geq 4\cdot(2p+1)=8p+3\geq 8p+1,$$

或者

$$S(a^p+b^p)\geq S\left((6p+1)^\gamma\right)=\gamma\cdot(6p+1)\geq 2\cdot(6p+1)=12p+2\geq 8p+1.$$

于是我们可假定 $1\leq\beta\leq 3$, $\gamma=1$. 现在我们证明在这种情况下当 $p\geq 17$ 时, a^p+b^p 不可能含有 p 的方幂. 若不然, 当 $\alpha\geq 2$ 时, 由于 p 整除 $a+b$, 设 $a+b=p^k\cdot u$, $(p,\ u)=1$. 则由前面的引理知 $k=\alpha$ 或者 $\alpha-1$. 显然由 $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 知 $k=\alpha$ 不可能成立, 因为此时 $p^{\alpha+1}$ 整除 a^p+b^p. 于是可设 $k=\alpha-1$. 从而由 $a+b=p^{\alpha-1}\cdot u$ 可得

$$2\cdot\left(\frac{p^{\alpha-1}}{2}\right)^p\leq 2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^p\leq a^p+b^p=p^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma.$$

注意到, $\alpha\geq 2$, $1\leq\beta\leq 3$, $\gamma=1$, 所以当 $p\geq 17$ 时容易验证上式显然不成立.

当 $\alpha=1$ 时, 由于 $a^p+b^p\equiv a+b \pmod p$, 所以 $k=\alpha=1$, 由前面理由可知 $p^2\mid a^p+b^p$, 这是不可能的. 所以 a^p+b^p 不可能含有素因子 p. 这样我们立刻得到

$$2^p+1\leq a^p+b^p=(2p+1)^\beta\cdot(6p+1),$$

其中 $1\leq\beta\leq 3$. 当 $p\geq 17$ 时, 经过计算上式不等式是不可能成立的.

同理可以证明当 $p\geq 17$ 时, $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(4p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 且 $\beta=\gamma=1$ 是不可能的. 而当 $\beta\geq 2$ 或者 $\gamma\geq 2$ 时, 由 $S(n)$ 的性质知 $S(a^p+b^p)\geq 8p+1$ 是显然的.

现在我们讨论 a^p+b^p 仅含有一个不等于 p 的素因子 q 的情况. 我们只需讨论:

$$a^p+b^p=p^\alpha\cdot(2p+1)^\beta,\ \text{或者}\ a^p+b^p=p^\alpha\cdot(4p+1)^\beta,\quad\text{或者}\ a^p+b^p=p^\alpha\cdot(6p+1)^\beta.$$

若 $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(2p+1)^\beta$ 成立, 则当 $\beta\geq 4$ 时, 显然有估计式:

$$S\left(a^p+b^p\right)\geq S\left((2p+1)^4\right)=4\cdot(2p+1)\geq 8p+1.$$

当 $\beta\leq 3$ 时, 由前面的证明过程可知当 $p\geq 17$ 时, 若 $\alpha\geq 1$, 则 $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(2p+1)^\beta$ 不可能成立: 同样若 $\alpha=0$, 则 $a^p+b^p=(2p+1)^\beta$ 且 $1\leq\beta\leq 3$ 也不成立.

同理可证明第二和第三种情况 $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(4p+1)^\beta$ 及 $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(6p+1)^\beta$.

于是完成了定理的证明.

1.3 Smarandahce 函数在费尔马数上的下界估计

1.3.1 费尔马数与主要结论

对任意非负整数 n, 著名的费尔马数 F_n 定义为 $F_n=2^{2^n}+1$. 例如 $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$, $\cdots$. 显然前 5 个费尔马数都是素数, 于是费尔马就猜测对所有非负整数 n, F_n 为素数. 但瑞士数学家欧拉于 1732 年举出了反例: $F_5=641\times 6700417$. 因此费尔马猜想是错的. 事实上当 $n=6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 18,\ 23,\ 36,\ 38,\ 73$ 时, F_n 都不是素数. 如果 F_n 为素数, 我们把它称为费尔马素数. 是否存在无穷多个费尔马素数是一个未解决的数论难题. 德国数学家高斯曾证明: 若 F_n 是素数, 则正 F_n 边形可用圆规及直尺作出. 所以费尔马素数也有着重要的几何背景. 关于 Smarandache 函数在费尔马数列上的下界估计, 王锦瑞在文献 [7] 中进行了研究, 获得了一个较强的下界估计. 最近, 朱敏慧 [11] 利用初等方法、原根的性质以及组合技巧改进了文献 [7] 中的结论, 获得了更好的下界估计. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 1.3. 对任意正整数 $n\geq 3$, 我们有估计式

$$S\left(F_n\right)\geq 12\cdot 2^n+1.$$

1.3.2 定理 1.3 的证明

这节我们用初等方法、原根的性质以及组合技巧直接给出定理 1.3 的证明. 首先注意到 $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, 它们都是素数. 因此对 $n = 3$, 4, 我们有 $S(F_3) = 257 \geq 12 \cdot 2^3 + 1$, $S(F_4) = 65537 > 12 \cdot 2^4 + 1$. 因此不失一般性我们假定 $n \geq 5$. 如果 $F_n = p$, 一个素数, 那么由 $S(n)$ 的性质我们有 $S(F_n) = S(p) = p = F_n = 2^{2^n} + 1 \geq 12 \cdot 2^n + 1$; 如果 F_n 是一个复合数, 那么设 p 是 F_n 的任意素因子, 显然 $(2,\ p) = 1$. 设 m 表示 2 mod p 的指标. 即就是, m 表示最小的正整数 r 使得

$$2^r \equiv 1 \pmod{p}.$$

因为 $p \mid F_n$, 我们有 $F_n = 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 或者 $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$, 及 $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. 由此同余式及指标的性质 (参阅文献 [8] 中定理 10.1) 我们有 $m \mid 2^{n+1}$, 因此 m 是 2^{n+1} 的一个因子. 设 $m = 2^d$, 其中 $1 \leq d \leq n+1$. 显然 $p \nmid 2^{2^d} - 1$, 如果 $d \leq n$. 因此 $m = 2^{n+1}$ 以及 $m \mid \phi(p) = p - 1$. 于是 $2^{n+1} \mid p - 1$ 或者

$$p = h \cdot 2^{n+1} + 1. \tag{1-7}$$

现在我们分下列三种情况讨论:

(A). 如果 F_n 有至少三个不同的素因子, 根据 (1-7) 式不妨设为 $p_i = h_i \cdot 2^{n+1} + 1$, $i = 1,\ 2,\ 3$. 因为 $2^{n+1} + 1$ 和 $2 \cdot 2^{n+1} + 1$ 不可能同时为素数 (至少有一个能被 3 整除), $2^{n+1} + 1$ 和 $5 \cdot 2^{n+1} + 1$ 不可能同时为素数 (至少有一个能被 3 整除), $2 \cdot 2^{n+1} + 1$ 和 $4 \cdot 2^{n+1} + 1$ 不可能同时为素数 (至少有一个能被 3 整除), $2^{n+1} + 1$ 和 $4 \cdot 2^{n+1} + 1$ 不可能同时为素数 (至少有一个能被 3 或者 5 整除), $2 \cdot 2^{n+1} + 1$ 和 $3 \cdot 2^{n+1} + 1$ 不可能同时为素数 (至少有一个能被 3 或者 5 整除), $4 \cdot 2^{n+1} + 1$ 和 $5 \cdot 2^{n+1} + 1$ 不可能同时为素数 (至少有一个能被 3 整除), 这样一来, 在 F_n 所含的 3 个不同素因子中, 至少有一个 $p_i = h_i \cdot 2^{n+1} + 1$ 中的 $h_i \geq 6$. 不妨设 $h_3 \geq 6$, 则由 $S(n)$ 的性质知:

$$S(F_n) \geq p_3 \geq 6 \cdot 2^{n+1} + 1 = 12 \cdot 2^n + 1.$$

(B). 如果 F_n 恰好含两个不同的素因子, 不失一般性可设

$$F_n = \left(2^{n+1} + 1\right)^{\alpha} \cdot \left(3 \cdot 2^{n+1} + 1\right)^{\beta}, \text{或者 } \left(2 \cdot 2^{n+1} + 1\right)^{\alpha} \cdot \left(5 \cdot 2^{n+1} + 1\right)^{\beta},$$
$$\text{或者 } \left(3 \cdot 2^{n+1} + 1\right)^{\alpha} \cdot \left(4 \cdot 2^{n+1} + 1\right)^{\beta}.$$

如果 $F_n=\left(2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}$ 且 $\alpha\geq 6$ 或者 $\beta\geq 2$, 那么由 $S(n)$ 的性质我们立刻推出估计式

$$\begin{aligned} S(F_n) &\geq \max\left\{S\left(\left(2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\right),\ S\left(\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}\right)\right\} \\ &= \max\left\{\alpha\cdot\left(2^{n+1}+1\right),\ \beta\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)\right\} \\ &\geq 12\cdot 2^n+1. \end{aligned}$$

如果 $F_n=2^{2^n}+1=\left(2^{n+1}+1\right)\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)=3\cdot 2^{2n+2}+2^{n+3}+1$, 那么注意到 $n\geq 5$, 我们有同余式

$$0\equiv 2^{2^n}+1-1=3\cdot 2^{2n+2}+2^{n+3}\equiv 2^{n+3} \pmod{2^{n+4}}.$$

矛盾. 因此, $F_n=2^{2^n}+1\neq\left(2^{n+1}+1\right)\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)$.

如果 $F_n=\left(2^{n+1}+1\right)^2\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)=3\cdot 2^{3n+3}+3\cdot 2^{2n+3}+3\cdot 2^{n+1}+2^{2n+2}+2^{n+2}+1$, 那么我们仍然有

$$0\equiv 2^{2^n}+1-1=3\cdot 2^{3n+3}+3\cdot 2^{2n+3}+3\cdot 2^{n+1}+2^{2n+2}+2^{n+2}\equiv 3\cdot 2^{n+1} \pmod{2^{n+2}}.$$

矛盾. 因此, $F_n=2^{2^n}+1\neq\left(2^{n+1}+1\right)^2\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)$.

如果 $F_n=2^{2^n}+1=\left(2^{n+1}+1\right)^3\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)$, 那么

$$2^{2^n}+1\equiv\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^2\equiv 3\cdot 2^{n+2}+1 \pmod{2^{n+4}},$$

或者

$$0\equiv 2^{2^n}\equiv\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^2-1\equiv 3\cdot 2^{n+2} \pmod{2^{n+4}}.$$

这与 $2^{n+4}\nmid 3\cdot 2^{n+2}$ 矛盾.

如果 $F_n=2^{2^n}+1=\left(2^{n+1}+1\right)^4\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)$, 那么

$$0\equiv 2^{2^n}\equiv\left(2^{n+1}+1\right)^4\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)-1\equiv 3\cdot 2^{n+1} \pmod{2^{n+3}}.$$

这与 $2^{n+3}\nmid 3\cdot 2^{n+1}$ 矛盾.

如果 $F_n=2^{2^n}+1=\left(2^{n+1}+1\right)^5\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)$, 那么

$$0\equiv 2^{2^n}\equiv\left(2^{n+1}+1\right)^5\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)-1\equiv 2^{n+4} \pmod{2^{2n+2}}.$$

这与 $2^{2n+2}\nmid 2^{n+4}$ 矛盾, 因为 $n\geq 5$.

如果 $F_n=\left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\cdot\left(5\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}$ 且 $\alpha\geq 3$ 或者 $\beta\geq 2$, 那么由 $S(n)$ 的性质有

$$S(F_n)\ \geq\ \max\left\{S\left(\left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\right),\ S\left(\left(5\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}\right)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\left\{\alpha\cdot\left(2\cdot 2^{n+1}+1\right),\ \beta\cdot\left(5\cdot 2^{n+1}+1\right)\right\}\\
&\geq 12\cdot 2^n+1.
\end{aligned}
$$

如果 $F_n = 2^{2^n}+1 = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)\cdot\left(5\cdot 2^{n+1}+1\right)$, 那么我们有

$$F_n = 2^{2^n}+1 = 5\cdot 2^{2n+3}+7\cdot 2^{n+1}+1.$$

从而可推出同余式

$$0\equiv 2^{2^n} = 5\cdot 2^{2n+3}+7\cdot 2^{n+1}\equiv 7\cdot 2^{n+1} \pmod{2^{2n+3}}.$$

这是不可能的, 因为 $2^{2n+3}\nmid 7\cdot 2^{n+1}$.

如果 $F_n = 2^{2^n}+1 = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^2\cdot\left(5\cdot 2^{n+1}+1\right)$, 那么我们有同余式

$$0\equiv 2^{2^n} = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^2\cdot\left(5\cdot 2^{n+1}+1\right)-1\equiv 5\cdot 2^{n+1} \pmod{2^{n+3}}.$$

这是不可能的, 因为 $2^{n+3}\nmid 5\cdot 2^{n+1}$.

(C). 如果 F_n 恰好有一个素因子, 这时当 F_n 为素数时, 定理 1.3 显然成立. 于是我们假定

$$F_n = \left(2^{n+1}+1\right)^\alpha \quad \text{或者} \quad F_n = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^\alpha,\ \alpha\geq 2.$$

如果 $F_n = \left(2^{n+1}+1\right)^\alpha$, 那么当 $\alpha\geq 6$ 时定理 1.3 显然成立. 如果 $\alpha = 1$, 2, 3, 4 或者 5, 那么由同余式不难推出矛盾. 因此 $F_n\neq\left(2^{n+1}+1\right)^\alpha$, $1\leq\alpha\leq 5$.

如果 $F_n = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^\alpha$, 那么当 $\alpha\geq 3$ 时由 $S(n)$ 的性质可知定理 1.3 显然成立. 如果 $\alpha = 1$, 那么 F_n 为素数, 定理 1.3 也成立. 当 $F_n = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^2$ 时, 由同余式

$$0\equiv 2^{2^n} = (2^{n+2}+1)^2-1\equiv 2^{n+3} \pmod{2^{2n+2}}.$$

立刻推出矛盾. 因为当 $n\geq 5$ 时, $2^{2n+2}\nmid 2^{n+3}$.

结合以上三种情况, 我们立刻完成了定理 1.3 的证明.

1.4 Smarandache 函数在阶乘位移上的下界估计

1.4.1 阶乘位移介绍

定义 1.2. 对于正整数 n, 形如 $n!\pm1$ 的正整数称为阶乘位移 (shifted factorial).

最近, J. Sándor 和 F. Luca [12] 根据 C. L. Stewart [13] 有关阶乘位移 $n!+1$ 的素因数方面的结果证明了:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S(n!+1)}{n}\geq 5.5. \tag{1-8}$$

同时, 文献 [12] 还根据 M. Murthy 和 S. Wong [14] 有关 $abc-$ 猜想的假设性结果证明了: 如果 $abc-$ 猜想成立, 则

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{S(n!+1)}{n}=\infty. \tag{1-9}$$

这里的 $abc-$ 猜想是指由 J. Oesterlé [15] 和 D. W. Masser [16] 提出的著名猜想: 当互素的正整数 a,b,c 适合 $a+b=c$ 时, 对于任意的正数 ϵ, 乘积 abc 的不同素因数的乘积 $\mathrm{rad}(abc)$ 满足 $c<C(\epsilon)(\mathrm{rad}(abc))^{1+\epsilon}$, 其中 $C(\epsilon)$ 是仅与 ϵ 有关的可有效计算的常数. 这是一个迄今远未解决的难题 (参见文献 [17] 的问题 B19). 最近, 郭艳春运用初等方法证明了以下无条件限制的结果:

定理 1.4. 当 $n>10^3$ 时,

$$\frac{S(n!\pm1)}{n}\geq\left[\frac{\log n}{\log\log n}\right], \tag{1-10}$$

其中 $[\alpha]$ 表示实数 α 的整数部分.

根据上述定理直接可得以下推论:

推理 1.4.1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n!\pm1)}{n}=\infty. \tag{1-11}$$

显然, 推论 1.4.1 不但在本质上改进了结果 (1-8), 而且在无条件限制的情况下证明了结果 (1-9).

另外, 运用上面定理还可以给出有关阶乘位移的素因数的下界. 设 P_n 是 $n!+1$ 的最大素因数. 对此, P. Erdös 和 C. L. Stewart [18] 证明了: 存在无穷多个正整数 n 可使 $P_n > 2n$. 此后, 文献 [13] 进一步证明了: 对于任何正数 ϵ, 可使 $P_n > (5.5-\epsilon)n$ 成立的正整数 n 具有正密率. 此外, 文献 [14] 在假定 $abc-$ 猜想成立的条件下证明了:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{P_n}{n} = \infty.$$

根据本节定理可得到以下结果:

推理 1.4.2. 当 $n > 10^3$ 时, $n! \pm 1$ 必有素因数 p 满足

$$\frac{pr}{n} \geq \left[\frac{\log n}{\log\log n}\right], \tag{1-12}$$

其中 r 是 p 在 $n!\pm 1$ 的标准分解式中的次数.

1.4.2 定理和两个推论的证明

首先我们介绍几个定理证明需要的引理:

引理 1.4.1. 如果 $a = p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ 是 a 的标准分解式, 则 $S(a) = \max\{S(p_1^{r_1}),\cdots,S(p_k^{r_k})\}$.

引理 1.4.2. 对于素数 p 和正整数 r, 必有 $p \leq S(p^r) \leq pr$.

引理 1.4.1 和引理 1.4.2 的证明参照文献 [19].

引理 1.4.3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是 k $(k>1)$ 个未定元. 对于正整数 m,

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^m = \sum \binom{m}{n_1, n_2, \cdots, n_k} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k},$$

其中 "$\sum$" 表示对方程

$$n_1+n_2+\cdots+n_k = m,\ n_i\in\mathbf{Z},\ n_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,k$$

的所有解 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 求和,

$$\binom{m}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{m!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

都是正整数, 称为多项式系数.

证明: 参见文献 [20] 第 1.2.2 节的定理 B.

引理 1.4.4. 设 x 和 y 是适合

$$(x+1)^{x+1} > \frac{y}{e} \tag{1-13}$$

的正数. 当 $y > 10^3$ 时, 必有

$$(x+1) > \frac{\log y}{\log\log y}. \tag{1-14}$$

证明: 如果 $x+1 \le (\log y)/\log\log y$, 则在 (1-13) 的两边取对数后可得

$$\frac{\log y}{\log\log y}(\log\log y - \log\log\log y) > \log y - 1. \tag{1-15}$$

当 $y > 10^3$ 时, 因为 $\log\log y > 0$, 所以从 (1-15) 可知

$$\log\log y > (\log y)(\log\log\log y). \tag{1-16}$$

设 $z = \log\log y$, 从 (1-16) 可知

$$\frac{\log\log y}{\log y} = \frac{z}{e^z} < \frac{z}{z + z^2/2} = \frac{1}{1 + z/2}. \tag{1-17}$$

因此从 (1-16) 和 (1-17) 可得

$$1 > (1 + \frac{z}{2}) \log z. \tag{1-18}$$

然而, 由于 $y > 10^3$, 所以 $z > 1.93$ 且 $\log z > 0.65$, 故从 (1-18) 可得 $1 > 1.27$ 这一矛盾. 由此可知: 当 $y > 10^3$ 时, 不等式 (1-14) 成立. 引理证完.

以下我们对定理和推论进行证明.

定理 1.4 的证明: 设 $m = S(n! \pm 1)$. 根据 Smarandache 函数的定义: $S(n) = \min\{k : k \in \mathbf{N}, n \mid k!\}$, 可知

$$m! = (n! \pm 1)a,\ \ a \in \mathbf{N}. \tag{1-19}$$

从 (1-19) 可知 $m > n$. 设 $q = [m/n]$. 此时 q 必为正整数, 而且利用带余除法可知

$$m = nq + s,\ \ s \in \mathbf{Z},\ \ 0 \leq s < n. \tag{1-20}$$

设

$$b = s!(n!)^q. \tag{1-21}$$

因为从 (1-20) 和 (1-21) 可知

$$\frac{m!}{b} = \frac{m!}{s!n! \cdots n!} = \binom{m}{s, n, \cdots, n} \tag{1-22}$$

是多项式系数, 所以从引理 1.4.3 可知 $m!/b$ 是正整数. 同时, 在引理 1.4.3 中取 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$ 以及 $k = q + 1$, 则根据引理 1.4.3, 从 (1-20) 和 (1-22) 可知

$$\frac{m!}{b} < (q + 1)^m. \tag{1-23}$$

另一方面, 因为从 (1-20) 可知 $s < n$, 所以从 (1-21) 可知 $\gcd(b, n! \pm 1) = 1$. 由于已经证明 $b \mid m!$, 故从 (1-19) 可得 $b \mid a$. 因此从 (1-19) 可得

$$\frac{m!}{b} = (n! \pm 1)\frac{a}{b} \geq n! \pm 1. \tag{1-24}$$

结合 (1-23) 和 (1-24) 立得

$$(q + 1)^m \geq n!. \tag{1-25}$$

根据 Stirling 公式可知 $n! > (n/e)^n$, 所以从 (1-25) 可得

$$(q + 1)^m > (\frac{n}{e})^n. \tag{1-26}$$

由于从 (1-20) 可知 $m < n(q + 1)$, 所以从 (1-26) 可知

$$(q + 1)^{q+1} > \frac{n}{e}. \tag{1-27}$$

当 $n > 10^3$ 时, 根据引理 1.4.4, 从 (1-27) 可得

$$q + 1 > \frac{\log n}{\log\log n}. \tag{1-28}$$

又因 q 是正整数, 故从 (1-28) 立得

$$q \geq \left[\frac{\log n}{\log\log n}\right]. \tag{1-29}$$

因为从 (1-20) 可知 $m \geq nq$, 故从 (1-29) 可得 (1-10). 定理证完.

推论 1.4.1 的证明: 设

$$n! \pm 1 = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \tag{1-30}$$

是 $n! \pm 1$ 的标准分解式, 又设 p^r 是 (1-30) 中可使 $S(p^r)$ 最大的素数方幂, 即 $S(p^r) = \max\{S(p_1^{r_1}), \cdots, S(p_k^{r_k})\}$. 根据引理 1.4.1 可知

$$S(n! \pm 1) = S(p^r). \tag{1-31}$$

又从引理 1.4.2 可知 $S(p^r) < pr$, 故从 (1-31) 可得

$$S(n! \pm 1) < pr. \tag{1-32}$$

于是, 根据本文定理所得的结论 (1-10), 从 (1-32) 可知 (1-12) 成立. 推论证完.

第二章 关于 Smarandache LCM 函数的一些问题

2.1 引言

本章将介绍一系列关于 Smarandache LCM 函数及它的对偶函数的最新研究成果, 首先我们来看两个定义:

定义 2.1. 对任意正整数 n, 著名的 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k, 使得 $n \mid [1,\ 2,\ \cdots,\ k]$, 即

$$SL(n) = \min\{k:\ k \in \mathbf{N},\ n \mid [1,\ 2,\ \cdots,\ k]\},$$

这里 $[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 表示 $1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 的最小公倍数. 例如, $SL(6)=3$, $SL(10)=5$, $SL(12)=4$, $SL(20)=5$, $\cdots$. 特别当 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 时, 不难验证

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}.$$

定义 2.2. 我们定义函数 $SL(n)$ 的对偶函数 $\overline{SL}(n)$ 如下:

$$\overline{SL}(n) = \min\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}.$$

例如, 这个函数的前几项为 $\overline{SL}(1)=1$, $\overline{SL}(6)=2$, $\overline{SL}(12)=3$, $\overline{SL}(20)=4$, $\cdots$.

2.2 关于 Smarandache LCM 函数及其对偶函数

关于 $SL(n)$ 这个函数的性质, 许多学者进行了研究, 并取得了不少重要的结果, 参阅文献 [21-25]. 例如, 陈健斌 [21] 研究了 $SL(n)$ 的值分布问题, 证明了渐近公式:

$$\sum_{n\le x} (SL(n) - P(n))^2 = \frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子.

Le Maohua [22] 讨论了方程 $SL(n) = S(n)$ 的可解性, 并完全解决了该问题. 即就是证明了: 任何满足该方程的正整数可表示为 $n = 12$ 或者 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} p$, 其中 p_1, p_2, $\cdots$, p_r, p 是不同的素数且 α_1, α_2, $\cdots$, α_r 是满足 $p > p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \cdots, r$ 的正整数.

赵院娥 [23] 研究了均方值 $\left(SL(n) - \overline{\Omega}(n)\right)^2$ 的渐近性质, 给出了渐近公式:

$$\sum_{n \le x} \left(SL(n) - \overline{\Omega}(n)\right)^2 = \frac{4}{5} \zeta\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta- 函数, c_i 为可计算的常数, $\overline{\Omega}(n)$ 为可加函数, 定义为: $\overline{\Omega}(n) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j p_j$, 如果 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

而关于 $\overline{SL}(n)$ 这一新函数的初等性质, 我们至今知道的甚少, 甚至不知道它的均值分布性质. 本节主要目的是介绍闫晓霞 [26] 的工作, 即利用初等及组合方法研究混合均值

$$\sum_{n \le x} \frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} \tag{2-1}$$

的渐近性质, 并证明了下面的结论:

定理 2.1. 对任意实数 $x > 1$, 我们有渐近公式:

$$\sum_{n \le x} \frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x(\ln \ln x)^2}{\ln^2 x}\right).$$

显然这个定理中的误差项是非常弱的, 也就是说误差项与主项仅差一个 $\dfrac{(\ln \ln x)^2}{\ln x}$ 因子, 是否存在 (2-1) 式的一个较强的渐近公式也是一个有趣的问题, 建议有兴趣的读者进一步研究.

证明: 以下我们直接给出定理 2.1 的证明. 事实上我们将所有小于或等于 x 的正整数 n 分为以下三种情况讨论: $A = \{n:\ \omega(n) = 1,\ n \le x\}$; $B = \{n:\ \omega(n) = 2,\ n \le x\}$; $C = \{n:\ \omega(n) \ge 3,\ n \le x\}$, 其中 $\omega(n)$ 表

示 n 的所有不同素因子的个数. 现在我们分别估计函数 $\dfrac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}$ 在这三个集合上的均值. 注意到素数定理 [27]

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in A}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} &= \sum_{p^\alpha\le x}\frac{\overline{SL}(p^\alpha)}{SL(p^\alpha)}=\sum_{p\le x}\frac{\overline{SL}(p)}{SL(p)}+\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}\frac{\overline{SL}(p^\alpha)}{SL(p^\alpha)}\\
&= \sum_{p\le x}1+\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}1=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)+O\left(\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}1\right)\\
&= \frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \qquad (2\text{-}2)
\end{aligned}$$

现在我们估计主要误差项. 当 $n\in B$ 时, 我们有 $n=p^\alpha q^\beta$, 其中 p 及 q 为不同的素数. 不妨设 $p^\alpha<q^\beta$, 注意到渐近公式 (参阅文献 [8])

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+C_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in B}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} &= \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta\le x\\ p^\alpha<q^\beta}}\frac{\overline{SL}(p^\alpha)}{SL(q^\beta)}=\sum_{p^\alpha\le\sqrt{x}}\sum_{p^\alpha<q^\beta\le\frac{x}{p^\alpha}}\frac{p^\alpha}{q^\beta}\\
&= \sum_{p\le\sqrt{x}}\sum_{p<q^\beta\le\frac{x}{p}}\frac{p}{q^\beta}+\sum_{\substack{p^\alpha\le\sqrt{x}\\ \alpha\ge 2}}\sum_{p^\alpha<q^\beta\le\frac{x}{p^\alpha}}\frac{p^\alpha}{q^\beta}\\
&= \sum_{p\le\sqrt{x}}\sum_{p<q\le\frac{x}{p}}\frac{p}{q}+O\left(\sum_{p\le\sqrt{x}}p^{\frac{1}{2}}\ln x\right)+O\left(\sum_{\substack{p^\alpha\le\sqrt{x}\\ \alpha\ge 2}}p^\alpha\ln\ln x\right)\\
&= \sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\le\sqrt{x}}\sum_{p<q\le\frac{x}{p}}\frac{p}{q}+\sum_{p\le\frac{\sqrt{x}}{\ln x}}\sum_{q\le\frac{x}{p}}\frac{p}{q}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\le\sqrt{x}} p\left(\ln\ln\frac{x}{p}-\ln\ln p+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)\\
&= \sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\le\sqrt{x}} p\ln\frac{\ln x-\ln p}{\ln p}+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)\\
&\ll \sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\le\sqrt{x}} p\ln\frac{\ln x-\frac{1}{2}\ln x+\ln\ln x}{\frac{1}{2}\ln x-\ln\ln x}+\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\\
&\ll \sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\le\sqrt{x}} p\ln\left(1+\frac{4\ln\ln x}{\ln x-2\ln\ln x}\right)+\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\\
&\ll \sum_{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}<p\le\sqrt{x}} \frac{p\ln\ln x}{\ln x-2\ln\ln x}+\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\ll\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}. \qquad (2\text{-}3)
\end{aligned}
$$

当 $n\in C$ 时，我们以 $\omega(n)=3$ 为例给予证明. 不妨设 $n=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}$ 且 $p_1^{\alpha}<p_2^{\beta}<p_3^{\gamma}$. 于是由上式的估计方法我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{p_1^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}\le x\\ p_1^{\alpha}<p_2^{\beta}<p_3^{\gamma}}}\frac{\overline{SL}(p_1^{\alpha})}{SL(p_3^{\gamma})} &= \sum_{p_1^{\alpha}\le x^{\frac{1}{3}}} p_1^{\alpha}\sum_{\substack{p_2^{\beta}p_3^{\gamma}\le\frac{x}{p_1^{\alpha}}\\ p_2^{\beta}<p_3^{\gamma}}}\frac{1}{p_3^{\gamma}}\\
&= O\left(\sum_{p_1\le x^{\frac{1}{3}}}p_1\sum_{p_1<p_2\le\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{p_1}}}\sum_{p_2<p_3\le\frac{x}{p_1p_2}}\frac{1}{p_3}\right)\\
&\ll \sum_{p_1\le x^{\frac{1}{3}}}\frac{\sqrt{xp_1}}{\ln x}\ln\ln x\ll\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}. \qquad (2\text{-}4)
\end{aligned}
$$

注意到正整数 n 的所有不同素因子的个数 $\omega(n)\ll\ln\ln n$, 于是反复应用 (2-4) 式我们不难推出估计式

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in C}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)} &= \sum_{\substack{n\le x\\ 3\le\omega(n)\le\ln\ln x}}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}=\sum_{3\le k\le\ln\ln x}\sum_{\substack{n\le x\\ \omega(n)=k}}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}\\
&\ll \frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}. \qquad (2\text{-}5)
\end{aligned}
$$

现在结合 (2-2)、(2-3) 及 (2-5) 式我们推出估计式

$$\sum_{n\le x}\frac{\overline{SL}(n)}{SL(n)}=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right).$$

于是完成了定理 2.1 的证明.

2.3 Smarandache LCM 函数的对偶函数与最小素因子的均方值

上节我们讨论了 Smarandache LCM 函数与其对偶函数的比率关系, 获得了一个较弱的均值公式. 本节继续讨论 Smarandache LCM 函数的对偶函数的其它性质, 也就是利用初等及解析方法研究均方值

$$\sum_{n\le x}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2 \tag{2-6}$$

的渐近性质，其中 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子. 例如 $p(20)=2$, $p(21)=3$. 关于 (2-6) 式的均值性质, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有在现有的文献中看到. 然而, 这一问题是有意义的, 因为 (2-6) 式的渐近性反映了这两个函数值分布的规律性. 本节针对这一问题进行了研究, 并给出了一个有趣的均值公式. 具体地说也就是证明了下面的结论:

定理 2.2.[28] 设 k 为给定的正整数. 那么对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式:

$$\sum_{n\le x}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 是可计算的常数且 $c_1=\dfrac{4}{5}$.

显然定理 2.2 中的误差项是非常弱的, 也就是说误差项与主项仅差一个 $\dfrac{1}{\ln x}$ 因子, 是否存在 (2-6) 式的一个较强的渐近公式也是一个有趣的问题. 建议有兴趣的读者进一步研究.

证明: 下面我们结合初等及解析方法直接给出定理 2.2 的证明. 事实上我们将所有小于或等于 x 的正整数 n 分为以下两个集合讨论: $A=\{n:\ \omega(n)=1,\ n\leq x\}$; $B=\{n:\ \omega(n)\geq 2,\ n\leq x\}$, 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的所有不同素因子的个数. 现在我们分别估计函数 $\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2$ 在这两个集合上的均值. 注意到对任意正整数 k, 由文献 [27] 中定理 3.2 可得

$$\pi(x)=\sum_{p\leq x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 a_i 为可计算的常数且 $a_1=1$. 于是应用 Abel 求和公式 (参阅文献 [8] 中定理 4.2) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq\sqrt{x}}p^4 &= x^2\cdot\pi\left(\sqrt{x}\right)-3\int_2^{\sqrt{x}}y^3\cdot\pi(y)dy\\ &= x^2\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot\sqrt{x}}{\ln^i\sqrt{x}}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^{k+1}x}\right)\right)\\ &\quad -3\int_2^{\sqrt{x}}y^3\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot y}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right)dy\\ &= \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}\tag{2-7}$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数且 $c_1=\dfrac{4}{5}$.

于是应用 (2-7) 式我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2 &= \sum_{p^\alpha\leq x}\left(\overline{SL}(p^\alpha)-p\right)^2\\ &= \sum_{p\leq x}(p-p)^2+\sum_{\substack{p^\alpha\leq x\\ \alpha\geq 2}}(p^\alpha-p)^2\\ &= \sum_{p\leq\sqrt{x}}(p^2-p)^2+\sum_{\substack{p^\alpha\leq x\\ \alpha\geq 3}}(p^\alpha-p)^2\\ &= \sum_{p\leq\sqrt{x}}p^4+O\left(\sum_{p\leq\sqrt{x}}p^3\right)+O\left(\sum_{p\leq x^{\frac{1}{3}}}p^6\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i \cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right). \tag{2-8}$$

现在我们估计主要误差项. 当 $n \in B$ 时, 由于 $\omega(n) \geq 2$, 我们不妨设 $\overline{SL}(n) = q^\alpha$, $n = q^\alpha n_1$, 其中 $\overline{SL}(n_1) > q^\alpha$. 如果 $\alpha = 1$, 那么 $SL(n) - p(n) = 0$. 于是当 $\left(\overline{SL}(n) - p(n)\right)^2 \neq 0$ 时有 $\alpha \geq 2$ 且有不等式 $q^\alpha < \sqrt{n} < n_1$, 从而应用 Abel 求和我们不难得到:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in B} \left(\overline{SL}(n) - p(n)\right)^2 &= \sum_{q^\alpha \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n_1 \leq \frac{x}{q^\alpha} \\ \overline{SL}(n_1) > q^\alpha}} \left(q^\alpha - p(qn_1)\right)^2 \\
&\ll \sum_{q \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n_1 \leq \frac{x}{q} \\ \overline{SL}(n_1) > q}} (q - q)^2 + \sum_{q \leq x^{\frac{1}{4}}} \sum_{n_1 \leq \frac{x}{q^2}} q^6 \\
&\ll x \sum_{q \leq x^{\frac{1}{4}}} q^4 \ll x^{\frac{9}{4}} \ll \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1} x}.
\end{aligned} \tag{2-9}$$

现在结合 (2-8) 及 (2-9) 式我们立刻推出渐近公式

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \left(\overline{SL}(n) - p(n)\right)^2 &= \sum_{n \in A} \left(\overline{SL}(n) - p(n)\right)^2 + \sum_{n \in B} \left(\overline{SL}(n) - p(n)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i \cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),
\end{aligned}$$

其中 c_i $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数且 $c_1 = \dfrac{4}{5}$. 于是完成结论的证明.

2.4 一个包含 Smarandache LCM 函数的对偶函数的方程

前两节我们主要研究了与 Smarandache LCM 函数的对偶函数 $\overline{SL}(n)$ 有关的均值性质, 这一节我们讨论一个包含 $\overline{SL}(n)$ 的方程, 进一步探索 Smarandache LCM 函数的对偶函数的算数性质.

研究发现函数 $\overline{SL}(n)$ 与函数 $SL(n)$ 有许多相似的性质, 例如, 当 n 为素数的方幂时, $\overline{SL}(n)=SL(n)$. 对于 $\overline{SL}(n)$ 函数及欧拉函数 $\varphi(n)$, 经检验我们发现存在无限多个正整数 n 使得 $\sum\limits_{d|n}\overline{SL}(d)>\varphi(n)$. 事实上, 易推出当 $n=p^\alpha$ 为素数方幂时, 我们有

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)=1+p+\cdots+p^\alpha>p^\alpha-p^{\alpha-1}=\varphi(n),$$

同时又存在无限多个正整数 n, 使得 $\sum\limits_{d|n}\overline{SL}(d)<\varphi(n)$. 例如, 当 n 为两个不同奇素数的乘积时, 即 $n=p\cdot q$, 若 $5\le p<q$ 为素数, 那么

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p\cdot q}\overline{SL}(d)=1+2p+q<(p-1)\cdot(q-1)=\varphi(n).$$

于是我们自然想到, 对于哪些正整数 n 会有方程

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\varphi(n). \tag{2-10}$$

成立, 其中 $\sum\limits_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因数求和, $\varphi(n)$ 为欧拉函数.

本节的主要目的就是介绍陈国慧 [29] 的成果, 即利用初等方法研究方程 (2-10) 的可解性, 并获得了该方程的所有正整数解. 具体地说就是证明了下面的:

定理 2.3. 方程 $\sum\limits_{d|n}\overline{SL}(d)=\varphi(n)$ 有且仅有五个正整数解 $n=1,75,88,102,132$.

为了完成定理的证明, 首先需要两个简单的引理.

引理 2.4.1. 不等式 $\varphi(n)<4d(m)$ 成立当且仅当 $m=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,24,28,30,32,36,40,42,48,56,60,72,80,84,96,120,144,168,288$. 这里 $d(m)$ 为 Dirichlet 除数函数.

证明: 令 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 m 的标准分解式. 我们分以下几种情况来进行讨论:

i) 如果分解式中存在因子 2^α 且 $\alpha \geq 6$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i}(1-\frac{1}{p_i})}{\alpha_i+1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}{\alpha_i+1} \geq \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha+1} > 4,$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

ii) 如果分解式中存在因子 3^α 且 $\alpha \geq 3$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{3^{\alpha-1}\cdot 2}{\alpha+1} > 4,$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

iii) 如果分解式中存在因子 5^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{5^{\alpha-1}\cdot 4}{\alpha+1} > 4,$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

iv) 如果分解式中存在因子 7^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{7^{\alpha-1}\cdot 6}{\alpha+1} > 4,$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

v) 如果分解式中存在因子 p^α 且 $p \geq 11$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{p^{\alpha-1}\cdot (p-1)}{\alpha+1} > 4,$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

因此我们只需在 $m = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$ $(0 \leq \alpha \leq 5,\ 0 \leq \beta \leq 2,\ \gamma = \delta = 0$ 或 $1)$ 中寻找满足条件 $\varphi(m) < 4d(m)$ 的正整数 m 即可, 经过验证, 得出以下的 35 个满足条件的 m : $m = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,24,28,30,32,36,40,42,$ 48, 56, 60,72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288. 于是完成了引理 2.4.1 的证明.

引理 2.4.2. 当 m 不含有素因子 2 时, 不等式 $\varphi(m) < 6d(m)$ 成立当且仅当 $m = 1,3,5,7,9,11,15,21,27,33,35,45,63,105$.

证明: 令 $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 m 的标准分解因式, 其中 $p_i \geq 3$ $(i = 1,2,\cdots,k)$. 我们分以下几种情况来进行讨论:

i) 如果分解式中存在因子 3^α 且 $\alpha \geq 4$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{3^{\alpha-1}\cdot 2}{\alpha+1} > 6,$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

ii) 如果分解式中存在因子 5^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{5^{\alpha-1}\cdot 4}{\alpha+1} > 6,$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

iii) 如果分解式中存在因子 7^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{7^{\alpha-1}\cdot 6}{\alpha+1} > 6,$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

iv) 如果分解式中存在因子 11^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{11^{\alpha-1}\cdot (p-1)}{\alpha+1} > 6,$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

v) 如果分解式中存在因子 p^α 且 $p \geq 13$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{p^{\alpha-1}\cdot (p-1)}{\alpha+1} \geq 6,$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

因此我们只需在 $m = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$ $(0 \leq \alpha \leq 5,\ 0 \leq \beta \leq 2,\ \gamma = \delta = 0$ 或 $1)$ 中寻找满足条件 $\varphi(m) < 6d(m)$ 的正整数 m 即可, 经过验证, 得出以下 14 个满足条件的 m : $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 27, 33, 35, 45, 63, 105$.

于是完成了引理 2.4.2 的证明.

定理的证明: 现在我们利用这两个引理来给出定理的证明. 容易验证 $n = 1$ 是方程的解. 设 $n > 1$ 且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式, 因为 $n = p^\alpha$ 不满足方程, 所以当 n 满足方程时有 $k \geq 2$. 现在设

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\} = p^\alpha.$$

为方便起见设 $n = mp^\alpha$ 满足方程, 此时应有:

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\overline{SL}(d) &= \sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d|m}\overline{SL}(dp^i) = \sum_{d|m}\overline{SL}(d) + \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d|m}\overline{SL}(dp^i)\\ &= p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(m).\end{aligned}$$

因为当 $d \mid m$ 时, $\overline{SL}(dp^i) \leq p^i$, 所以

$$\begin{aligned}p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(m) &\leq \sum_{d|m}\overline{SL}(d) + \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d|m}p^i = \sum_{d|m}\overline{SL}(d) + d(m)\cdot\sum_{i=1}^{\alpha}p^i\\ &= \sum_{d|m}\overline{SL}(d) + \frac{p(p^\alpha-1)}{p-1}d(m).\end{aligned}$$

上式两边同除以 $p^{\alpha-1}(p-1)$, 并注意到当 $d \mid m$ 时 $\overline{SL}(d) \leq p^i$, 所以有

$$\begin{aligned}\varphi(m) &\leq \sum_{d|m}\frac{\overline{SL}(d)}{p^{\alpha-1}(p-1)} + \frac{p(p^\alpha-1)}{p^{\alpha-1}(p-1)^2}d(m)\\ &\leq \frac{p}{p-1}\cdot d(m) + (\frac{p}{p-1})^2\cdot d(m) = \frac{p(p-1)+p^2}{(p-1)^2}\cdot d(m).\end{aligned}$$

当 $p > 2$ 时, 上式变为 $\varphi(m) < 4\varphi(m)$, 当 $p = 2$ 时, 上式变为 $\varphi(m) \leq 6d(m)$. 即若 $n = mp^\alpha$ 满足方程, 当 $p > 2$ 时, 应有 $\varphi(m) < 4d(m)$, 也就是当 $\varphi(m) \geq 4d(m)$ 时, $n = mp^\alpha$ 不是方程的解; 或当 $p = 2$ 时, 应有 $\varphi(m) \leq 6d(m)$, 也就是当 $\varphi(m) > 6d(m)$ 时, $n = m\cdot 2^\alpha$ 不是方程的解.

由引理 2.4.1 可知, $\varphi(m) < 4d(m)$ 当且仅当 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56,60, 72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288$. 由引理 2.4.2 可知, $p = 2$ 时, $\varphi(m) \leq 6d(m)$ 当且仅当 $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 27, 33, 35, 45, 63, 105$. 下面只需讨论在上述列举的 m 中, 那些 $n = mp^\alpha$ 满足方程即可.

1) 当 $m = 1$ 时, $n = p^\alpha$, 这里 p 是任意素数.

$$\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha > p^\alpha - p^{\alpha-1} = \varphi(p^\alpha),$$

即 $n = p^\alpha$ 不是方程 (2-10) 的解.

2) 当 $m=2$ 时, $n=2p^\alpha$, 这里 $p\geq 3$.

$$\begin{aligned}\sum_{d|2p^\alpha}\overline{SL}(d) &= \sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(2d)=\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)+2(\alpha+1)\\ &= 1+p+p^2+\cdots+p^\alpha+2(\alpha+1),\\ \sum_{d|2p^\alpha}\overline{SL}(d) &> \varphi(2p^\alpha)=\varphi(2)\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

所以 $n=2p^\alpha$ $(p\geq 3)$ 不是方程 (2-10) 的解.

3) 当 $m=3$ 时, $n=3p^\alpha$, 这里 $p\neq 3$, 若 $p=2$,

$$\sum_{d|3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)=\sum_{d|2^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum_{d|2^\alpha}\overline{SL}(3d)=2^{\alpha+1}+3\alpha+1.$$

对 α 用数学归纳法可证 $2^{\alpha+1}+3\alpha+1>3\cdot 2^{\alpha-1}$, 即

$$\sum_{d|3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)>\varphi(3\cdot 2^\alpha).$$

若 $p=5$, 当 $\alpha=1$ 时, $n=15$ 不是方程 (2-10) 的解; 当 $\alpha=2$ 时, $n=75$ 满足方程 (2-10), 因而是方程 (2-10) 的解; 当 $\alpha\geq 3$ 用数学归纳法可证

$$\sum_{d|3\cdot 5^\alpha}\overline{SL}(d)=1+5+5^2+\cdots+5^\alpha+3(\alpha+1)<2(5^\alpha-5^{\alpha-1})=\varphi(3\cdot 5^\alpha).$$

此时 $n=3\cdot 5^\alpha$ 不是方程 (2-10) 的解.

若 $p\geq 5$ 时, 同上可证 $n=3\cdot p^\alpha$ 不是方程 (2-10) 的解.

4) 当 $m=4$ 时, $n=4p^\alpha$, 则 $p\geq 3$, 分 $p=3,p=5,p=7,p=11,p=13$ 及 $p>13$ 六种情况用上面的方法讨论得知 $n=4p^\alpha$ 都不是方程 (2-10) 的解.

5) 当 $m=5$ 时, 分 $p=2,p=3,p>5$ 讨论 $n=5p^\alpha$ 都不是方程 (2-10) 的解.

6) 当 $m=6$ 时, $n=6p^\alpha$, 则 $p\geq 5$. 经过验证得知当 $p=17,\alpha=1$ 时, $n=102$ 是方程 (2-10) 的解, 其他情况都不是方程 (2-10) 的解.

7) 当 $m=7,8,9,10$ 时, 同上可验证 $n=m\cdot p^\alpha$ 都不是方程 (2-10) 的解.

8) 当 $m=11$ 时, 由引理 2.4.2 知道, $p=2$, 此时 $n=11\cdot 2^\alpha$, 容易验证当 $\alpha=3$ 时 $n=88$ 是方程 (2-10) 的解, 而对 α 的其他取值 n 都不是方程 (2-10) 的解.

9) 当 $m = 12$ 时, 则 $n = 12 \cdot p^{\alpha}$, 此时 $p \geq 5$. 容易验证当 $p = 11, \alpha = 1$ 时, $n = 132$ 是方程 (2-10) 的解, 而对 p 及 α 的其他取值 n 都不是方程 (2-10) 的解.

10) 当 $m = 27, 33, 35, 45, 63, 105$ 时, $p = 2$, 可以验证这时的 $n = m \cdot 2^{\alpha}$ 都不是方程 (2-10) 的解.

11) 当 $m = 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56, 60, 72,$ $80,\ 84,\ 96,\ 120, 144, 168, 288$, 同上可以验证这时的 $n = m \cdot p^{\alpha}$ 都不是方程 (2-10) 的解.

综上所述, 方程 $\sum\limits_{d|n} \overline{SL}(d) = \varphi(n)$ 有且仅有五个正整数解 $n = 1, 75, 88, 102, 132$. 这就完成了定理的证明.

2.5 Smarandache 函数与 Smarandache LCM 函数的混合均值

关于 Smarandache 函数及 Smarandache LCM 函数的一些性质, 在前面已经做了不少研究. 然而, 有关这两个函数值的比率问题从未有人提到. 也就是均值

$$\sum_{n \leq x} \frac{S(n)}{SL(n)} \tag{2-11}$$

的渐近性质. 这一问题是有意义的, 因为 (2-11) 式的渐近性反映了这两个函数值分布的规律性, 如果渐近公式

$$\sum_{n \leq x} \frac{S(n)}{SL(n)} \sim x$$

成立, 那么我们就可以断定函数 $S(n)$ 与 $SL(n)$ 的值几乎处处相等. 本节将介绍杨明顺 [30] 的结果, 也就是针对这一问题进行了研究, 并证明了它的正确性. 具体地说也就是证明了下面两个的结论:

定理 2.4. 对任意实数 $x > 1$, 我们有渐近公式:

$$\sum_{n \leq x} \frac{S(n)}{SL(n)} = x + O\left(\frac{x \ln \ln x}{\ln x}\right).$$

定理 2.5. 对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式:

$$\sum_{n\leq x}\frac{P(n)}{SL(n)}=x+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right),$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子.

当然这两个定理中的误差项也是非常弱的, 是否存在一个较强的渐近公式也是一个有趣的问题.

证明: 以下我们将直接给出定理的证明. 我们只证明定理 2.4, 类似的, 我们也可以推出定理 2.5. 事实上经过简单变形我们立刻得到:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{S(n)}{SL(n)} &= \sum_{n\leq x}\frac{S(n)-SL(n)}{SL(n)}+\sum_{n\leq x}1\\ &= x+O\left(\sum_{n\leq x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}\right).\end{aligned}\tag{2-12}$$

现在我们利用函数 $S(n)$ 及 $SL(n)$ 的性质以及初等与组合方法来估计 (2-12) 式中的误差项. 由 $SL(n)$ 的性质知当 n 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时有:

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}.$$

若 $SL(n)$ 为素数 p, 那么 $S(n)$ 也为素数 p. 因此, 在这种情况下有 $SL(n)-S(n)=0$. 所以在 (2-12) 式的误差项中, 所有非零项必出现在那些使 $SL(n)$ 不等于素数的整数 n 中. 也就是说:

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}\equiv p^{\alpha},\ \alpha\geq 2.$$

设 A 为区间 $[1,\ x]$ 中所有满足上式条件 n 的集合, 对任意 $n\in A$, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=p^{\alpha}\cdot n_1$, 其中 $(p,\ n_1)=1$. 现在我们分两种情况讨论: 设 $A=B+C$, 其中 $n\in B$ 如果 $SL(n)=p^{\alpha}\geq\dfrac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}$; $n\in C$ 如果 $SL(n)=p^{\alpha}<\dfrac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}$. 于是我们有

$$\sum_{n\leq x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)} = \sum_{n\in B}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}+\sum_{n\in C}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n\leq \frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}} \sum_{\substack{\frac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}\leq p^\alpha\leq \frac{x}{n}\\ \alpha\geq 2}} 1+\sum_{n\in C} 1\\
&\equiv R_1+R_2. \qquad (2\text{-}13)
\end{aligned}$$

现在我们分别估计 (2-13) 式中的各项. 首先估计 R_1. 注意到 $p^\alpha\leq \ln^4 x$ 时有 $\alpha\leq 4\ln\ln x$. 于是由素数定理我们有

$$\begin{aligned}
R_1 &\leq \sum_{n\leq \frac{x}{\ln^4 x}} \sum_{\substack{p^\alpha\leq \frac{x}{n}\\ \alpha\geq 2}} 1+\sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leq n\leq \frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}} \sum_{\substack{p^\alpha\leq \frac{x}{n}\\ \alpha\geq 2}} 1\\
&\ll \sum_{n\leq \frac{x}{\ln^4 x}} \sum_{p\leq \sqrt{\frac{x}{n}}} \sum_{\alpha\leq \ln x} 1+\sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leq n\leq \frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}} \sum_{p\leq \sqrt{\frac{x}{n}}} \sum_{\alpha\leq 4\ln\ln x} 1\\
&\ll \sum_{n\leq \frac{x}{\ln^4 x}} \sqrt{\frac{x}{n}}\frac{\ln x}{\ln\ln x}+\sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leq n\leq \frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}} \sqrt{\frac{x}{n}}\ll \frac{x\ln\ln x}{\ln x}. \qquad (2\text{-}14)
\end{aligned}$$

现在我们估计 R_2, 注意到集合 C 中包含元素的个数不会超过整数 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 的个数, 其中 $\alpha_i\leq 2\ln\ln x$, $p_i\leq \dfrac{\ln x}{3\ln\ln x}$, $i=1,\ 2,\ \cdots$. 于是注意到素数分布公式

$$\sum_{p\leq y}\ln p=y+O\left(\frac{y}{\ln y}\right),\quad -\ln\left(1-\frac{1}{\ln p}\right)\sim\frac{1}{\ln p},$$

我们有

$$\begin{aligned}
R_2 &= \sum_{n\in C} 1\leq \prod_{p\leq \frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\left(\sum_{0\leq\alpha\leq 2\ln\ln x} p^\alpha\right)\leq \prod_{p\leq \frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\frac{p^{2\ln\ln x}}{1-\frac{1}{\ln p}}\\
&\ll \prod_{p\leq \frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\left(1-\frac{1}{\ln p}\right)^{-1}\exp\left(2\ln\ln x\sum_{p\leq \frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\ln p\right)\\
&\ll \exp\left(\frac{3}{4}\ln x+\sum_{p\leq \frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\frac{1}{\ln p}\right)\ll \frac{x}{\ln x}, \qquad (2\text{-}15)
\end{aligned}$$

其中 $\exp(y)=e^y$.

结合 (2-13)、(2-14) 及 (2-15) 式我们推出估计式

$$\sum_{n\leq x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}\ll \frac{x\ln\ln x}{\ln x}. \qquad (2\text{-}16)$$

利用 (2-12) 及 (2-16) 式立刻推出渐近公式:

$$\sum_{n\le x}\frac{S(n)}{SL(n)} = x + O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

于是完成了定理 2.4 的证明.

注意到当 $SL(n)=p$ 为素数时, $S(n)=P(n)=p$; 当 $SL(n)$ 不为素数时, $P(n)\le S(n)\le SL(n)$, 于是由证明定理 2.4 的方法立刻推出定理 2.5.

2.6 一个包含 Smarandache 函数与 Smarandache LCM 函数的方程

上一节我们介绍了 Smarandache 函数 $S(n)$ 及 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 这两个函数值的比率问题, 也就是均值 $\sum\limits_{n\le x}\dfrac{S(n)}{SL(n)}$ 的渐近性质, 从结果可以断定函数 $S(n)$ 与 $SL(n)$ 的值几乎处处相等. $S(n)$ 与 $SL(n)$ 除了有这个性质之外, 还会有什么样的联系呢? 本节将介绍陈国慧 [31] 的研究成果, 具体的说就是利用初等及组合方法研究方程

$$\sum_{d|n}S(d)=\sum_{d|n}SL(d) \tag{2-17}$$

的可解性, 并获得它的所有正整数解. 即证明了下面的定理:

定理 2.6. 等式 (2-17) 有无穷多个正整数解, 即 $n=1$, $2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 k 是一个任意的正整数, $\alpha=0$, 1 或者 2, $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不同的素数且满足 $2<p_1<p_2<\cdots<p_k$.

设 A 表示满足方程 (2-17) 的所有正整数 n 的集合, 那么可以得到下面的定理.

定理 2.7. 对于任意复数 s 且 $Re(s)>1$, 有

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\frac{4^s+2^s+1}{4^s+2^s},$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数.

定理 2.8. 对于任意实数 $x \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}} 1 = \frac{7}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).$$

注意到 $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$ 和 $\zeta(8) = \dfrac{\pi^8}{9450}$, 于是由定理 2.7 可以得出下面的推论.

推论 2.6.1. 在定理 2.7 中, 令 $s = 2, 4$, 则有恒等式

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^2} = \frac{63}{4\pi^2} \quad 及 \quad \sum_{n\in A} \frac{1}{n^4} = \frac{28665}{272\pi^4}.$$

定理的证明: 以下我们来完成定理的证明. 首先, 证明定理 2.6. 事实上, 由函数 $S(n)$ 和 $SL(n)$ 的定义可知, $n = 1$ 是方程 (2-17) 的一个解. 设 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 由 $S(n)$ 和 $SL(n)$ 的定义和性质可以得到 $S(n) = \max\{S(p_1^{\alpha_1}), S(p_2^{\alpha_2}), \cdots, S(p_k^{\alpha_k})\} = S(p_i^{\alpha_i}) \leq \alpha_i p_i$, $SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\} = p_j^{\alpha_j}$, 显然 $p_j^{\alpha_j} \geq p_i^{\alpha_i} \geq \alpha_i p_i$. 所以, 对任意正整数 $n > 1$, 令 $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(2 < p_1 < \cdots < p_k)$, 可以将 n 分成三种情况进行讨论:

1) 对 $\alpha = 0, 1$, 有

(a) 如果 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1$, 即 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 或者 $n = 2p_1 p_2 \cdots p_k$, 对于 n 的任意因子 d, 有 $S(d) = SL(d)$, 故它们是方程 (2-17) 的解.

(b) 如果至少有一个 α_i $(i \geq 2)$, 有 $S(p_i^{\alpha_i}) \leq \alpha_i p_i$, $SL(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i}$, 故它们不满足方程 (2-17).

2) 对 $\alpha = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1$, 有

(c) 如果 $p_1 = 3$, 即 $n = 4 \times 3n_1$ $(12 \nmid n_1)$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} S(d) &= \sum_{d|n_1} S(d) + \sum_{d|n_1} S(2d) + \sum_{d|n_1} S(4d) + \sum_{d|n_1} S(3d)\\ &\quad + \sum_{d|n_1} S(6d) + \sum_{d|n_1} S(12d)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d|n_1} S(d) + (2-1+\sum_{d|n_1} S(d)) + (4-1+\sum_{d|n_1} S(d)) + \\
&\quad (3-1+\sum_{d|n_1} S(d)) + (3-1+\sum_{d|n_1} S(d)) + (4-1+\sum_{d|n_1} S(d)) \\
&= 11 + 6\sum_{d|n_1} S(d),
\end{aligned}
$$

同时有 $\sum\limits_{d|n} SL(d) = 11 + 6\sum\limits_{d|n_1} SL(d)$. 考虑 $\sum\limits_{d|n_1} S(d) = \sum\limits_{d|n_1} SL(d)$, 故它们是方程 (2-17) 的解.

(d) 如果 $p_1 > 3$, 即 $n = 4 \times n_1$ $(4 \nmid n_1)$, 可以得到 $\sum\limits_{d|n} S(d) = 4 + 3\sum\limits_{d|n_1} S(d)$ 和 $\sum\limits_{d|n} SL(d) = 4 + 3\sum\limits_{d|n_1} SL(d)$, 故它们是方程 (2-17) 的解.

3) 如果 $\alpha \geq 3$, 可以得到至少存在一个次数 $\alpha \geq 2$, 使得 $S(2^\alpha) \leq 2\alpha$, $SL(2^\alpha) = 2^\alpha > 2\alpha$, 于是得到它们不是方程 (2-17) 的解.

结合以上几种讨论的情况, 可以得到方程 (2-17) 存在无数多个正整数解, 它们是 $n = 1$, $2^\alpha p_1 p_2 \cdots p_k$ ($\alpha = 0$, 1 或 2), 其中 $2 < p_1 < \cdots < p_k$ 表示不同的素数, 至此我们完成了定理 2.6 的证明.

现在我们来证明定理 2.7. 从欧拉乘积公式 (见文献 [8] 定理 11.7) 和墨比乌斯函数的性质以及 Riemann zeta- 函数的定义, 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{n \in A} \frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} + \frac{1}{4^s} \sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) + \frac{1}{4^s} \frac{\prod\limits_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)}{1 + \frac{1}{2^s}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{4^s + 2^s}\right) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \frac{4^s + 2^s + 1}{4^s + 2^s}.
\end{aligned}
$$

这样就完成了定理 2.7 的证明.

现在证明定理 2.8. 从墨比乌斯函数的性质可以得到:

$$
\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} 1 = \sum_{n \leq x} |\mu(n)| + \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{4} \\ 2 \nmid n}} |\mu(n)| = \sum_{n \leq x} \sum_{d^2 | n} \mu(d) + \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{4} \\ 2 \nmid n}} \sum_{d^2 | n} \mu(d)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d^2 l\le x}\mu(d)+\sum_{\substack{d^2 l\le \frac{x}{4}\\ 2\dagger d^2 l}}\mu(d)=\sum_{d^2\le x}\sum_{1\le l\le \frac{x}{d^2}}\mu(d)+\sum_{\substack{d^2\le \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}\sum_{\substack{1\le l\le \frac{x}{4d^2}\\ 2\dagger l}}\mu(d)\\
&= \sum_{d^2\le x}\mu(d)\sum_{1\le l\le \frac{x}{d^2}}1+\sum_{\substack{d^2\le \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}\mu(d)\sum_{\substack{1\le l\le \frac{x}{4d^2}\\ 2\dagger l}}1\\
&= \sum_{d^2\le x}\mu(d)\left(\frac{x}{d^2}+O(1)\right)+\sum_{\substack{d^2\le \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}\mu(d)\left(\frac{x}{8d^2}+O(1)\right)\\
&= x\sum_{d^2\le x}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sum_{d^2\le x}|\mu(d)|)+x\sum_{\substack{d^2\le \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}\frac{\mu(d)}{8d^2}+O(\sum_{\substack{d^2\le \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}|\mu(d)|)\\
&= x\sum_{d\le\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}+\frac{x}{8}\sum_{\substack{d\le \frac{\sqrt{x}}{2}\\ 2\dagger d}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{x}),
\end{aligned}
$$

其中 $\sum\limits_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)$, $\sum\limits_{\substack{n\le \frac{\sqrt{x}}{2}\\ 2\dagger n}}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{8}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, 于是有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}1 &= x\left(\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{x}{8}\left(\frac{8}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)+O(\sqrt{x})\\
&= \frac{7}{\pi^2}x+O(\sqrt{x}).
\end{aligned}
$$

这样就完成了定理 2.8 的证明.

第三章 关于 Smarandache 和函数的一些问题

3.1 关于 Smarandache 和函数的均值

3.1.1 引言及结论

对任意正整数 n 及给定的正整数 $k > 1$, M. Bencze 曾定义了两个 Smarandache 和函数 $S(n,k)$ 及 $AS(n,k)$ 如下:

$$S(n,k) = \sum_{\substack{|n-ki|\leq n \\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}} (n - ik)$$

及

$$AS(n,k) = \sum_{\substack{|n-ki|\leq n \\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}} |n - ik|.$$

例如, $S(9,4) = 9 + (9-4) + (9-8) + (9-12) + (9-16) = 5$; $S(11,5) = 11 + (11-5) + (11-10) + (11-15) + (11-20) = 5$; $AS(9,4) = 9 + |9-4| + |9-8| + |9-12| + |9-16| = 25$; $AS(11,5) = 11 + |11-5| + |11-10| + |11-15| + |11-20| = 31$. 同时 M. Bencze 还建议人们研究函数 $S(n,k)$ 及 $AS(n,k)$ 的算数性质, 参阅文献 [32] 及 [33]. 关于这一问题, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有在现有的文献中见到. 然而, 作者认为这两个函数是有意义的, 至少可以反映出正整数 n 在 k 的倍数数列中的分布性质. 此外, 在数列 $\{S(n,k)\}$ 中, 正整数 n 和 k 满足什么条件时, $S(n,k) = 0$? 能否刻画出这类整数的特征? 这些都是有意义的研究内容. 最近, 赵院娥研究了这一问题, 获得了一些进展. 本节将介绍这些最新工作. 文中所涉及的高斯取整函数的性质, 可参阅文献 [8] 及 [9]. 本节的主要目的是利用初等方法以及高斯取整函数的性质研究函数 $S(n,k)$ 及 $AS(n,k)$ 的均值性质, 给出两个有趣的均值公式. 具体地说也就是证明下面两个结论:

定理 3.1. 设 $k>1$ 为给定的整数, 那么对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} S(n,k)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3+(-1)^k}{2k}\right)x^2+R(x,k),$$

其中 $|R(x,k)|\le \frac{7}{8}k^2+\frac{5k}{8}x$.

定理 3.2. 设 $k>1$ 为给定的整数, 那么对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} AS(n,k)=\frac{1}{3k}x^3+\frac{1}{4}\left(1+\frac{7+(-1)^k}{2k}\right)x^2+R_1(x,k),$$

其中 $|R_1(x,k)|\le \frac{7}{8}k^2+\frac{7}{8}kx+\frac{x}{6k}+\frac{x}{2}$.

显然这两个渐近公式是比较粗糙的, 利用深刻的解析数论方法有可能得到更精确的渐近公式.

3.1.2 定理 3.1 及定理 3.2 的证明

这节我们利用初等方法以及高斯取整函数的性质直接给出定理的证明. 首先我们用高斯取整函数将函数 $S(n,k)$ 进行简化, 表示成更简单的形式. 注意到 $|n-ki|\le n$ 当且仅当 $-n\le n-ki\le n$ 或者 $0\le i\le \left[\frac{2n}{k}\right]$, 其中 $[x]$ 为高斯取整函数, 即就是 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 于是函数 $S(n,k)$ 可表示为:

$$\begin{aligned}
&S(n,k)\\
=\ &\sum_{\substack{|n-ki|\le n\\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}}(n-ik)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{2n}{k}\right]}(n-ki)\\
=\ &n+n\cdot\left[\frac{2n}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{2n}{k}\right]\left(\left[\frac{2n}{k}\right]+1\right)\\
=\ &-n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k}-\frac{4n}{k}\left\{\frac{2n}{k}\right\}+\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2+\frac{2n}{k}-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{2n^2}{k}+n \\
= \quad & n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right), \qquad (3\text{-}1)
\end{aligned}
$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的分数部分, $0\le\{x\}<1$.

现在对任意整数 $x>1$, 设 $x=k\left[\frac{x}{k}\right]+r$, 这里 $0\le r<k$. 于是对 (3-1) 式求和可得:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n\le k\left[\frac{x}{k}\right]} S(n,k) \\
= \quad & \sum_{n\le k\left[\frac{x}{k}\right]}\left(n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]}\sum_{(i-1)k<n\le ik}\left(n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]}\sum_{1\le n\le k}\left((n+(i-1)k)\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]}\sum_{1\le n<\frac{k}{2}}\left((n+(i-1)k)\frac{2n}{k}-\frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k^2}-\frac{2n}{k}\right)\right) \\
& +\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]}\sum_{\frac{k}{2}<n<k}\left((n+(i-1)k)\frac{2n-k}{k}-\frac{k}{2}\left(\frac{(2n-k)^2}{k^2}-\frac{2n-k}{k}\right)\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]}\sum_{1\le n<k}\left((n+(i-1)k)\frac{2n}{k}-\frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k^2}-\frac{2n}{k}\right)\right)-\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]}\sum_{\frac{k}{2}\le n<k}(ik-n) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]}\frac{k(k-1)}{2}(2i-1)-\frac{k}{2}\left[\frac{x}{k}\right]\left(\left[\frac{x}{k}\right]+1\right)\sum_{\frac{k}{2}\le n<k}1+\left[\frac{x}{k}\right]\sum_{\frac{k}{2}\le n<k}n \\
= \quad & \frac{k(k-1)}{2}\left[\frac{x}{k}\right]^2-\frac{k}{2}\left[\frac{x}{k}\right]^2\sum_{\frac{k}{2}\le n<k}1-\frac{k}{2}\left[\frac{x}{k}\right]\sum_{\frac{k}{2}\le n<k}1+\left[\frac{x}{k}\right]\sum_{\frac{k}{2}\le n<k}n. \qquad (3\text{-}2)
\end{aligned}
$$

于是由 (3-2) 式知当 $2|k$ 时有恒等式:

$$\sum_{n\le k\left[\frac{x}{k}\right]} S(n,k) = \frac{k^2-2k}{4}\left[\frac{x}{k}\right]^2 + \frac{k^2-2k}{8}\left[\frac{x}{k}\right]. \tag{3-3}$$

当 k 为奇数时有恒等式:

$$\sum_{n\le k\left[\frac{x}{k}\right]} S(n,k) = \frac{k^2-k}{4}\left[\frac{x}{k}\right]^2 + \frac{(k-1)^2}{8}\left[\frac{x}{k}\right]. \tag{3-4}$$

而当 $0\le r\le k-1$ 时有

$$\begin{aligned}
& 0 \le \sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<n\le k\left[\frac{x}{k}\right]+r} S(n,k) \\
= & \sum_{1\le n\le r}\left(\left(n+k\left[\frac{x}{k}\right]\right)\left\{\frac{2n}{k}\right\} - \frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2 - \left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\right) \\
= & \sum_{1\le n\le r}\left(\left(n+k\left[\frac{x}{k}\right]\right)\left\{\frac{2n}{k}\right\} + \frac{k}{8} - \frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\} - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\
\le & \frac{5k^2}{8} + \frac{k}{2}x.
\end{aligned} \tag{3-5}$$

注意到:

$$\left[\frac{x}{k}\right]^2 = \frac{x^2}{k^2} - \frac{2x}{k}\left\{\frac{x}{k}\right\} + \left\{\frac{x}{k}\right\}^2,$$

结合公式 (3-2), (3-3) 及 (3-5) 我们立刻得到当 k 为偶数时有渐近公式:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} S(n,k) &= \sum_{n\le k\left[\frac{x}{k}\right]} S(n,k) + \sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<n\le k\left[\frac{x}{k}\right]+r} S(n,k) \\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{k}\right)x^2 + R(x,k),
\end{aligned}$$

其中 $|R(x,k)| \le \dfrac{7}{8}k^2 + \dfrac{5k}{8}x$.

结合公式 (3-2), (3-4) 及 (3-5) 可知当 k 为奇数时有渐近公式:

$$\sum_{n\le x} S(n,k) = \sum_{n\le k\left[\frac{x}{k}\right]} S(n,k) + \sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<n\le k\left[\frac{x}{k}\right]+r} S(n,k)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{k}\right)x^2+R(x,k),$$

其中 $|R(x,k)| \le \frac{7}{8}k^2+\frac{5k}{8}x$. 于是证明了定理 3.1.

现在我们证明定理 3.2. 由前面计算 $S(n,k)$ 的证明方法我们有

$$\begin{aligned}
AS(n,k) &= \sum_{\substack{|n-ki|\le n\\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}} |n-ik| = \sum_{i=0}^{\left[\frac{2n}{k}\right]} |n-ki| \\
&= \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]} |n-ki| + \sum_{i=\left[\frac{n}{k}\right]+1}^{\left[\frac{2n}{k}\right]} |n-ki| \\
&= n+n\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)-n\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-\left[\frac{n}{k}\right]\right)+ \\
&\quad +\frac{k}{2}\left[\frac{2n}{k}\right]\left(\left[\frac{2n}{k}\right]+1\right)-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right) \\
&= \frac{n^2}{k}+n-n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2 \\
&\quad +k\left\{\frac{n}{k}\right\}+\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}. \qquad (3\text{-}6)
\end{aligned}$$

所以由定理 3.1 的结论可得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} AS(n,k) \\
=& \sum_{n\le x}\left(\frac{n^2}{k}+n-n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2+k\left\{\frac{n}{k}\right\}+\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right) \\
=& \sum_{n\le x}\left(\frac{n^2}{k}+n\right)-\sum_{n\le x}\left(n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2+\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)- \\
&-\sum_{n\le x}\left(k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2-k\left\{\frac{n}{k}\right\}\right).
\end{aligned}$$

注意到估计式：

$$0\le -k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2+k\left\{\frac{n}{k}\right\}\le \frac{k}{4},$$

于是对任意正整数 x, 当 $k>1$ 为整数时有渐近公式:

$$\sum_{n\le x} AS(n,k) = \frac{1}{3k}x^3 + \frac{1}{4}\left(1+\frac{7+(-1)^k}{2k}\right)x^2 + R_1(x,k),$$

其中 $|R_1(x,k)| \le \frac{7}{8}k^2 + \frac{7}{8}kx + \frac{x}{6k} + \frac{x}{2}$. 于是完成了定理 3.2 的证明.

3.2 一类包含 Smarandache 和函数 $S(n,k)$ 的 Dirichlet 级数

3.2.1 Dirichlet 级数与主要结论

本节的主要目的是利用初等方法以及取整函数的性质研究函数 $S(n,k)$ 的算术性质以及一类包含 $S(n,k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题. 所谓 Dirichlet 级数就是指形如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$, 其中 a_n 为复数, s 为复变量. 这一级数在解析数论研究中占有十分重要的地位, 许多著名的数论难题如哥德巴赫猜想、素数分布、黎曼假设等都与之密切相关, 因此有关 Dirichlet 级数性质的研究具有重要的理论意义及学术背景. 本节着重介绍王建平 [34] 的结果, 也就是对某些特殊的正整数 $k>1$, 给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n,k)}{n^s}$ 的一个具体的计算公式. 具体地说也就是证明下面几个结论:

定理 3.3. 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>2$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n,4)}{n^s} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s-1) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta- 函数.

定理 3.4. 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>3$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,8)}{n^s} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{s-2}}\right)\zeta(s-2) + \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=4$ 时, 注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,8)}{n^4}=\frac{\pi^2}{32}+\frac{5\pi^4}{604}.$$

定理 3.5. 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>3$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,16)}{n^s}=\left(1+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=4$ 时我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,14)}{n^4}=\frac{9\pi^2}{64}+\frac{17\pi^4}{1440}.$$

定理 3.6. 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>3$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,6)}{n^s}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=4$ 时我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,6)}{n^4}=\frac{4\pi^2}{81}+\frac{16\pi^4}{2187}.$$

定理 3.7. 设 $p>2$ 为素数, 则对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>p$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S\left(n^{p-1},p\right)}{n^s}=\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{p^{s-p+1}}\right)\zeta(s-p+1)+\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s).$$

3.2.2 几个定理的证明

这节我们利用初等方法以及高斯取整函数的性质直接给出这些定理的证明. 首先我们用高斯取整函数将函数 $S(n,k)$ 进行简化, 注意到 (3-1) 式:

$$S(n,k)=n\left\{\frac{2n}{k}\right\}+\frac{k}{8}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{1}{2}\right)^2. \tag{3-7}$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的分数部分, $0\leq\{x\}<1$.

因为 $\left\{\dfrac{2n}{k}\right\}=\dfrac{2n}{k}$, 如果 $k>2n$. 所以当 $k>2n$ 时由 (3-7) 式有恒等式:

$$S(n,k)=\frac{2n^2}{k}-\frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k^2}-\frac{2n}{k}\right)=n.$$

又由于 $-\dfrac{k}{2}\left(\left\{\dfrac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\dfrac{2n}{k}\right\}\right)\geq 0$, 所以注意到 $0\leq\left\{\dfrac{2n}{k}\right\}\leq\dfrac{k-1}{k}$, 根据 (3-7) 式我们立刻推出当 $k<2n$ 时有估计式:

$$0\leq S(n,k)\leq n-\frac{n}{k}+\frac{k}{8}. \tag{3-8}$$

由 (3-8) 式不难推出当 $\mathrm{Re}(s)>2$ 时, Dirichlet 级数 $F_k(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n,k)}{n^s}$ 绝对收敛, 特别对 $k=4$, 注意到当 $k|2n$ 时有 $S(n,k)=0$; 当 n 为奇数时有 $S(n,4)=\dfrac{n+1}{2}$; $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}=\frac{1}{2^s}\zeta(s)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}$ 或者 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$, 所以我们有恒等式:

$$\begin{aligned}
F_4(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n,4)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(2n,4)}{2^sn^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(2n-1,4)}{(2n-1)^s}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(2n-1,4)}{(2n-1)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^s}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{s-1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s-1)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s),
\end{aligned} \tag{3-9}$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta- 函数. 于是证明了定理 3.3.

现在我们证明定理 3.5. 类似地可以推出定理 3.4. 当 $\mathrm{Re}(s)>3$ 时, 由 (3-7) 式我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,16)}{n^s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\left\{\frac{n^2}{8}\right\}-\frac{16}{2}\left(\left\{\frac{n^2}{8}\right\}^2-\left\{\frac{n^2}{8}\right\}\right)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}}{2^{s-2}(2n-1)^{s-2}}-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\left(\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}\right)}{2^s(2n-1)^s} \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{(2n-1)^2}{8}\right\}}{(2n-1)^{s-2}}-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\left(\left\{\frac{(2n-1)^2}{8}\right\}^2-\left\{\frac{(2n-1)^2}{8}\right\}\right)}{(2n-1)^s} \\
&= \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{s-2}}+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s} \\
&= \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理 3.5 的证明.

当 $k=6$ 时, 注意到当 3 不整除 n 时有 $n^2\equiv 1 \pmod 3$, 所以 $\left\{\dfrac{n^2}{3}\right\}=\dfrac{1}{3}$. 当 3 整除 n 时有 $\left\{\dfrac{n^2}{3}\right\}=0$. 所以由 (3-7) 式我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,6)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\left\{\frac{n^2}{3}\right\}-\frac{6}{2}\left(\left\{\frac{n^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{n^2}{3}\right\}\right)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^{s-2}}-3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^s} \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^{s-2}}-3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^s} \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2}}-\frac{1}{3^{s-2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2}}\right)+\frac{2}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\frac{1}{3^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s).
\end{aligned}
$$

于是证明了定理 3.6.

为证明定理 3.7, 我们注意到对任意素数 $p \geq 3$ 以及正整数 n 且 $(n,\ p)=1$, 由著名的 Euler(或 Fermat) 定理知 $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. 于是有 $\left\{\dfrac{2n^{p-1}}{p}\right\} = \dfrac{2}{p}$. 于是由公式 (3-7) 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S\left(n^{p-1}, p\right)}{n^s} \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p-1}\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\} - \frac{p}{2}\left(\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}^2 - \left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}\right)}{n^s} \\
=\ & \frac{2}{p} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,\ p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^{s-p+1}} + \left(1-\frac{2}{p}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ (n,\ p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.
\end{aligned}$$

由于 $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ (n,\ p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$, 由上式我们立刻推出恒等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S\left(n^{p-1}, p\right)}{n^s} = \frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{p^{s-p+1}}\right)\zeta(s-p+1) + \left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s).$$

于是完成了所有定理的证明.

3.3 一类包含 Smarandache 和函数 $AS(n,k)$ 的 Dirichlet 级数

3.3.1 主要结论

上一节介绍了一类包含 $S(n,k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题, 本节将继续介绍陈娇关于 $AS(n,k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题的研究成果, 此文章已被西南大学学报录用. 陈娇利用初等方法以及取整函数的性质研究了一类包含 $AS(n,k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题, 并对某些特殊的

正整数 $k>1$, 给出该级数的一个具体的计算公式. 具体地说也就是证明下面几个结论:

定理 3.8. 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>3$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n,2)}{n^s}=2\zeta(s-2)+\frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s-1),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta– 函数.

定理 3.9. 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>5$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2,8)}{n^s}=\frac{1}{8}\zeta(s-4)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s-2)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=6$ 时, 注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6)=\dfrac{\pi^6}{945}$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2,8)}{n^4}=\frac{\pi^2}{48}+\frac{49\pi^4}{5760}+\frac{7\pi^6}{43008}.$$

定理 3.10. 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>5$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2,4)}{n^s}=\frac{1}{4}\zeta(s-4)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s-2)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=6$ 时我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2,4)}{n^4}=\frac{\pi^2}{24}+\frac{17\pi^4}{2880}+\frac{\pi^6}{3840}.$$

定理 3.11. 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>5$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(2n^2,6)}{n^s}=\frac{2}{3}\zeta(s-4)+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3^{s-1}}\right)\zeta(s-2)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=6$ 时我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(2n^2,6)}{n^4}=\frac{\pi^2}{9}+\frac{83\pi^4}{10935}+\frac{1456\pi^6}{2066751}.$$

定理 3.12. 设 $p>2$ 为素数. 则对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>p$, 我们有恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^{p-1},p)}{n^s}\\
=\ &\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^{s-2p+2}}\right)\zeta(s-2p+2)\\
&+\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s-p+1}}\right)\zeta(s-p+1)+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s).
\end{aligned}$$

3.3.2 定理的证明

我们利用初等方法以及高斯取整函数的性质直接给出几个定理的证明. 首先我们用高斯取整函数将函数 $AS(n,k)$ 进行简化, 表示成更简单的形式. 注意到 $|n-ki|\le n$ 当且仅当 $-n\le n-ki\le n$ 或者 $0\le i\le\left[\frac{2n}{k}\right]$, 其中 $[x]$ 为高斯取整函数, 即就是 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 于是函数 $AS(n,k)$ 可表示为:

$$\begin{aligned}
&AS(n,k)\\
=\ &\sum_{\substack{|n-ki|\le n\\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}}|n-ik|=\sum_{i=0}^{\left[\frac{2n}{k}\right]}|n-ki|=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]}|n-ki|+\sum_{i=\left[\frac{n}{k}\right]+1}^{\left[\frac{2n}{k}\right]}|n-ki|\\
=\ &n+n\cdot\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)-n\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-\left[\frac{n}{k}\right]\right)\\
&+\frac{k}{2}\left[\frac{2n}{k}\right]\left(\left[\frac{2n}{k}\right]+1\right)-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\\
=\ &\frac{n^2}{k}+n-n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2+k\left\{\frac{n}{k}\right\}+\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\},
\end{aligned}\tag{3-10}$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的分数部分, $0\le\{x\}<1$.

因为 $\left\{\dfrac{2n}{k}\right\}=\dfrac{2n}{k}$, 如果 $k>2n$. 所以当 $k>2n$ 时由 (3-10) 式有恒等式:

$$AS(n,k)=\frac{n^2}{k}+n-\frac{2n^2}{k}-\frac{n^2}{k}+n+\frac{2n^2}{k}-n=n.$$

又由于 $-\dfrac{k}{2}\left(\left\{\dfrac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\dfrac{2n}{k}\right\}\right)\geq 0$, 所以注意到 $0\leq\left\{\dfrac{2n}{k}\right\}\leq\dfrac{k-1}{k}$, 根据 (3-10) 式我们立刻推出当 $k<2n$ 时有估计式:

$$0\leq AS(n,k)\leq\frac{n^2}{k}+n. \tag{3-11}$$

由 (3-11) 式不难推出当 $\mathrm{Re}(s)>3$ 时，Dirichlet 级数 $F_k(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{AS(n,k)}{n^s}$ 绝对收敛, 特别对 $k=2$, 注意到当 $2|n$ 时有 $AS(n,2)=\dfrac{n^2}{2}+n$; 当 n 为奇数时有 $AS(n,2)=\dfrac{n^2}{2}+n+\dfrac{1}{2}$; $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^s}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^s}=\dfrac{1}{2^s}\zeta(s)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^s}$ 或者 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^s}=\left(1-\dfrac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$, 所以我们有恒等式:

$$\begin{aligned}
F_2(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n,2)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(2n,2)}{(2n)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(2n-1,2)}{(2n-1)^s}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(2n)^2}{2}+2n}{(2n)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(2n-1)^2}{2}+2n-1+\frac{1}{2}}{(2n-1)^s}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^{s-1}}\\
&= 2\zeta(s-2)+\frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s-1),
\end{aligned}$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta- 函数. 于是证明了定理 3.8.

现在我们证明定理 3.10. 类似地可以推出定理 3.9. 当 $\mathrm{Re}(s)>3$ 时, 由 (3-10) 式我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2,4)}{n^s}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{n^4}{4}+n^2-n^2\left\{\frac{n^2}{2}\right\}-4\left\{\frac{n^2}{4}\right\}^2+4\left\{\frac{n^2}{4}\right\}+2\left\{\frac{n^2}{2}\right\}^2-2\left\{\frac{n^2}{2}\right\}}{n^s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\zeta(s-4)+\zeta(s-2)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{s-2}} \\
&\quad -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(2n-1)^2}{4}\right\}^2-\left\{\frac{(2n-1)^2}{4}\right\}}{(2n-1)^s}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}}{(2n-1)^s} \\
&= \frac{1}{4}\zeta(s-4)+\zeta(s-2)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{s-2}}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s} \\
&= \frac{1}{4}\zeta(s-4)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s-2)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理 3.10 的证明.

当 $k=6$ 时, 注意到当 3 不整除 n 时有 $n^2\equiv 1 \pmod 3$, 所以 $\left\{\frac{n^2}{3}\right\}=\frac{1}{3}$. 当 3 整除 n 时有 $\left\{\frac{n^2}{3}\right\}=0$. 所以由 (3-10) 式我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(2n^2,6)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(2n^2)^2}{6}+2n^2-2n^2\left\{\frac{2n^2}{3}\right\}-6\left\{\frac{n^2}{3}\right\}^2+6\left\{\frac{n^2}{3}\right\}+3\left\{\frac{2n^2}{3}\right\}^2-3\left\{\frac{2n^2}{3}\right\}}{n^s} \\
&= \frac{2}{3}\zeta(s-4)+2\zeta(s-2)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left\{\frac{2(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^{s-2}}-6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^s} \\
&\quad +3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{2(3n-1)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{2(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left\{\frac{2(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^{s-2}} \\
&\quad -6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^s}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{2(3n-2)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{2(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^s} \\
&= \frac{2}{3}\zeta(s-4)+2\zeta(s-2)-\frac{4}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2}}-\frac{1}{3^{s-2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2}}\right) \\
&\quad +\frac{2}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\frac{1}{3^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right) \\
&= \frac{2}{3}\zeta(s-4)+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3^{s-1}}\right)\zeta(s-2)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s).
\end{aligned}
$$

于是证明了定理 3.11.

为证明定理 3.12, 我们注意到对任意素数 $p \geq 3$ 以及正整数 n 且 $(n,\ p)=1$, 由著名的 Euler(或 Fermat) 定理知 $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. 于是有 $\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\} = \frac{2}{p}$. 于是由公式 (3-10) 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{AS(n^{p-1}, p)}{n^s} \\
= &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{n^{2p-2}}{p} + n^{p-1} - n^{p-1}\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\} - p\left\{\frac{n^{p-1}}{p}\right\}^2 + p\left\{\frac{n^{p-1}}{p}\right\}}{n^s} \right. \\
&\left. + \frac{\frac{p}{2}\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}^2 - \frac{p}{2}\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}}{n^s} \right) \\
= &\frac{1}{p} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^{s-2p+2}} + \left(1 - \frac{2}{p}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^{s-p+1}} + \frac{1}{p} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.
\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{\substack{n=1 \\ (n,\ p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$, 由上式我们立刻推出恒等式:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{AS(n^{p-1}, p)}{n^s} \\
= &\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p^{s-2p+2}}\right)\zeta(s-2p+2) \\
&+ \left(1 - \frac{2}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s-p+1}}\right)\zeta(s-p+1) + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\zeta(s).
\end{aligned}$$

于是完成了全部定理的证明.

3.4 关于 Smarandache 幂和的均值

3.4.1 研究背景及主要结论

在前几节中, 我们介绍了 Smarandache 和函数 $S(n,k)$ 及 $AS(n,k)$,

并给出了几个均值公式以及包含 $S(n,k)$ 的 Dirichlet 级数. 本节中我们定义两个新的 Smarandache 函数, 称为 Smarandache 幂和函数 $P(n,k)$ 及 $AP(n,k)$ 如下:

$$P(n,k) = \sum_{\substack{|n-k^i|\le n \\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}} (n-k^i)$$

及

$$AP(n,k) = \sum_{\substack{|n-k^i|\le n \\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}} |n-k^i|.$$

例如, $P(12,2) = (12-1)+(12-2)+(12-4)+(12-8)+(12-16) = 29$, $P(9,4) = (9-1)+(9-4)+(9-16) = 6$; $P(11,5) = (11-1)+(11-5) = 16$; $AP(12,2) = |12-1|+|12-2|+|12-4|+|12-8|+|12-16| = 37$; $AP(9,4) = |9-1|+|9-4|+|9-16| = 20$; $AP(11,5) = |11-1|+|11-5| = 16$. 关于这两个函数的各种算数性质, 我们似乎一无所知, 至少没有在现有的文献中见到. 然而, 我们认为这两个函数是有意义的, 至少可以反映出正整数 n 在 k 的方幂数列中的分布性质. 本节基于张谨的工作, 利用初等方法以及高斯取整函数的性质研究函数 $P(n,k)$ 及 $AP(n,k)$ 的均值性质, 给出两个有趣的均值公式. 具体地说也就是证明下面两个结论:

定理 3.13. 设 $k>1$ 为给定整数, 那么对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} P(n,k) = \frac{x^2}{2\ln k}\cdot \ln x + R(x,k),$$

其中 $|R(x,k)| \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^2\ln 2}{2\ln k} + \dfrac{1}{k-1}\cdot x - \dfrac{x^2}{k-1} + \dfrac{2x\ln(2x)+\ln(2x)+2x}{2\ln k}$.

定理 3.14. 设 $k>1$ 为给定整数, 那么对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} AP(n,k) = \frac{x^2}{2\ln k}\cdot \ln x + R_1(x,k),$$

其中 $|R_1(x,k)| \le 2x^2 + \dfrac{x}{k-1} - \dfrac{x^2\,(1+\ln 4)}{4\ln k}$.

从下面的证明过程也不难看出这两个定理的估计实际上是很粗糙的, 是否存在更精确的渐近公式也是一个有趣的问题.

3.4.2 定理 3.13 及定理 3.14 的证明

这节我们利用初等方法以及高斯取整函数的性质直接给出定理的证明. 首先我们用高斯取整函数将函数 $P(n,k)$ 进行简化, 表示成更简单的形式. 注意到 $|n-k^i|\le n$ 当且仅当 $-n\le n-k^i\le n$ 或者 $0\le i\le\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]$, 其中 $[x]$ 为高斯取整函数, 即就是 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 于是函数 $P(n,k)$ 可表示为:

$$\begin{aligned}
&P(n,k)\\
=&\sum_{\substack{|n-k^i|\le n\\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}}(n-k^i)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]}(n-k^i)\\
=&\ n+n\cdot\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]-\frac{k^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]+1}-1}{k-1}\\
=&\ \frac{n\cdot\ln(2n)}{\ln k}+n-n\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}-\frac{2nk\cdot k^{-\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}}-1}{k-1}\\
=&\ \frac{n\cdot\ln(2n)}{\ln k}+n+\frac{1}{k-1}-n\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}-\frac{2nk\cdot k^{-\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}}}{k-1},
\end{aligned}\tag{3-12}$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的分数部分, $0\le\{x\}<1$.

现在对任意整数 $x>1$, 由 Euler 求和公式 (参阅文献 [8] 中定理 4.9) 可得:

$$\int_1^x\frac{y\cdot\ln(2y)}{\ln k}dy\le\sum_{n\le x}\frac{n\cdot\ln(2n)}{\ln k}\le\int_1^{x+1}\frac{y\cdot\ln(2y)}{\ln k}dy,$$

或者

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2\ln k}\cdot\ln(2x)-\frac{x^2}{4}\ &\le\ \sum_{n\le x}\frac{n\cdot\ln(2n)}{\ln k}\\
&\le\ \frac{(x+1)^2}{2\ln k}\cdot\ln(2x+2)-\frac{(x+1)^2}{4}.
\end{aligned}\tag{3-13}$$

于是由 (3-13) 式立刻得到估计式:

$$\left|\sum_{n\le x}\frac{n\cdot\ln(2n)}{\ln k}-\frac{x^2}{2\ln k}\cdot\ln(2x)+\frac{x^2}{4}\right|\le\frac{2x\ln(2x)+\ln(2x)+2x}{2\ln k}.\text{(3-14)}$$

于是结合 (3-12) 及 (3-14) 式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}P(n,k)\\
=&\sum_{n\le x}\left(\frac{n\cdot\ln(2n)}{\ln k}+n+\frac{1}{k-1}-n\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}-\frac{2nk\cdot k^{-\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}}}{k-1}\right)\\
=&\sum_{n\le x}\frac{n\cdot\ln(2n)}{\ln k}+\sum_{n\le x}\left(\frac{1}{k-1}+n-n\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}-\frac{2nk\cdot k^{-\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}}}{k-1}\right)\\
=&\frac{x^2}{2\ln k}\cdot\ln(2x)+R(x,k),
\end{aligned}$$

其中 $|R(x,k)|\le\frac{x^2}{4}+\frac{1}{k-1}\cdot x-\frac{x^2}{k-1}+\frac{2x\ln(2x)+\ln(2x)+2x}{2\ln k}$. 于是证明了定理 3.13.

现在我们证明定理 3.14. 与证明定理 3.13 类似, 我们先对 $AP(n,k)$ 进行简化. 由 $AP(n,k)$ 的定义我们有

$$\begin{aligned}
AP(n,k)&=\sum_{\substack{|n-k^i|\le n\\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}}\left|n-k^i\right|=\sum_{i=0}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]}\left|n-k^i\right|\\
&=\sum_{i=0}^{\left[\frac{\ln n}{\ln k}\right]}(n-k^i)+\sum_{i=1+\left[\frac{\ln n}{\ln k}\right]}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]}(k^i-n)\\
&=2\sum_{i=0}^{\left[\frac{\ln n}{\ln k}\right]}(n-k^i)+\sum_{i=0}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]}(k^i-n)\\
&=2n+2n\cdot\left[\frac{\ln n}{\ln k}\right]-2\cdot\frac{k^{\left[\frac{\ln n}{\ln k}\right]+1}-1}{k-1}-n-n\cdot\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]\\
&\quad+\frac{k^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right]+1}-1}{k-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n\cdot\ln(n/2)}{\ln k}+n+\frac{1}{k-1}+n\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}-2n\left\{\frac{\ln n}{\ln k}\right\}\\
&\quad+\frac{2nk}{k-1}\cdot\left(k^{-\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}}-k^{-\left\{\frac{\ln n}{\ln k}\right\}}\right). \qquad (3\text{-}15)
\end{aligned}
$$

于是由 (3-15) 式及 Euler 求和公式立刻得到估计式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} AP(n,k)\\
=&\sum_{n\le x}\left(\frac{n\cdot\ln(n/2)}{\ln k}+n+\frac{1}{k-1}+n\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}-2n\left\{\frac{\ln n}{\ln k}\right\}\right)\\
&+\sum_{n\le x}\frac{2nk}{k-1}\cdot\left(k^{-\left\{\frac{\ln(2n)}{\ln k}\right\}}-k^{-\left\{\frac{\ln n}{\ln k}\right\}}\right)\\
=&\frac{x^2}{2\ln k}\cdot\ln x+R_1(x,k),
\end{aligned}
$$

其中 $|R_1(x,k)|\le 2x^2+\dfrac{x}{k-1}-\dfrac{x^2\,(1+\ln 4)}{4\ln k}$. 于是完成了定理 3.14 的证明.

第四章　关于可加函数的一些问题

4.1　一个新的可加函数与 Smarandache 数列

4.1.1　引言及结论

对任意正整数 n, 我们称算术函数 $f(n)$ 是可加的, 如果对任意正整数 m, n 且 $(m,\ n)=1$ 有 $f(mn)=f(m)+f(n)$. 称 $f(n)$ 是完全可加的, 如果对任意正整数 r 及 s 都有 $f(rs)=f(r)+f(s)$.

定义 4.1. 我们定义一个新的算数函数 $F(n)$ 如下: $F(0)=0$, 当 $n>1$ 且 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时, 定义 $F(n)=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots+\alpha_kp_k$.

事实上当 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 及 $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$ 时, 我们有 $mn=p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$, 从而由 $F(n)$ 的定义有 $F(mn)=(\alpha_1+\beta_1)p_1+(\alpha_2+\beta_2)p_2+\cdots+(\alpha_k+\beta_k)p_k=F(m)+F(n)$. 所以 $F(n)$ 是一个完全可加函数. 在初等数论中, 满足可加性质的算术函数很多, 例如当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时, 函数 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ 及对数函数 $f(n)=\ln n$ 都是完全可加函数. 此外, 正整数 n 的所有不同素因数的个数 $\omega(n)=k$ 是一个可加函数, 但不是完全可加函数. 关于可加函数性质的研究, 在初等数论以及素数分布问题中占有十分重要的位置, 许多著名的数论难题都与之密切相关, 因而其研究工作是很有意义的. 有关函数 $\Omega(n)$ 及 $\omega(n)$ 的性质, 可参阅文献 [35] 及 [36].

本节的主要目的是研究完全可加函数 $F(n)$ 在某些特殊数列上的均值分布问题, 并利用初等方法给两个较强的渐近公式. 为此, 我们先介绍一类 Smarandache 数列 $\{P_d(n)\}$ 及 $\{q_d(n)\}$. 在文献 [1] 及 [37] 中, 美籍罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 教授引入了许多数论函数及数列, 并提出了不少未解决的问题, 而 $\{P_d(n)\}$ 及 $\{q_d(n)\}$ 就是其中的两个有趣的数列, $P_d(n)$ 表示 n 的所有正因数的乘积, $q_d(n)$ 表示 n 的所有小于 n 的正数因子的乘积. 即就是

$$P_d(n)=\prod_{d|n}d=n^{\frac{d(n)}{2}};\qquad q_d(n)=\prod_{d|n,d<n}d=n^{\frac{d(n)}{2}-1},$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数, 即 n 的所有正因数的个数.

在文献 [1] 中, F. Smarandache 教授建议我们研究数列 $\{P_d(n)\}$ 及 $\{q_d(n)\}$ 的性质. 关于这一问题, 许多学者进行过研究, 获得了一系列有趣的结论, 参阅文献 [38] 及 [39]. 本节利用初等及解析方法研究了函数 $F(n)$ 在数列 $\{P_d(n)\}$ 及 $\{q_d(n)\}$ 上的均值问题, 并给出了两个较强的均值公式. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 4.1. 设 N 为给定的正整数, 则对任意给定的实数 $x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} F(P_d(n)) = \sum_{i=1}^{N} d_i \cdot \frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1} x}\right),$$

其中 d_i $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $d_1 = \dfrac{\pi^4}{72}$.

定理 4.2. 设 N 为给定的正整数, 则对任意给定的实数 $x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} F(q_d(n)) = \sum_{i=1}^{N} h_i \cdot \frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1} x}\right),$$

其中 h_i $(i = 1,\ 2, \cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $h_1 = \dfrac{\pi^4}{72} - \dfrac{\pi^2}{12}$.

4.1.2 两个简单的引理

为了完成定理的证明, 我们需要如下的简单引理:

引理 4.1.1. 对任意实数 $x > 1$, 设 $\pi(x)$ 表示所有不大于 x 的素数的个数, 则对任意正整数 k, 我们有渐近公式:

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \frac{x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 c_i $(i = 1,\ 2, \cdots,\ k)$ 为可计算的常数且 $c_1 = 1$.

证明: 参阅文献 [27] 中第三章定理 2.

引理 4.1.2. 设 N 为给定的正整数, 则对任意给定的实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}F(n)=\sum_{i=1}^{N}d_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x}\right),$$

其中 d_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $d_1=\dfrac{\pi^2}{12}$.

证明: 对任意正整数 n, 设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子. 现在我们定义如下两个集合:

$$A=\{n:\ n\le x,\ P(n)\le\sqrt{n}\};\qquad B=\{n:\ n\le x,\ P(n)>\sqrt{n}\}.$$

当 $n\in A$ 时, 由 $F(n)$ 的定义容易推出 $F(n)\ll\sqrt{n}\ln n$. 于是根据 Abel 恒等 (参阅文献 [8] 定理 4.2) 我们可得:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}F(n)\ll\sum_{n\le x}\sqrt{n}\ln n\ll x^{\frac{3}{2}}\ln x. \tag{4-1}$$

而对于集合 B, 注意到 $F(n)$ 的可加性质, 由引理 4.1.1 及 Abel 恒等我们有

$$\sum_{p\le\frac{x}{k}}p=\pi\left(\frac{x}{k}\right)\cdot\frac{x}{k}-\int_1^{\frac{x}{k}}\pi(y)dy=\sum_{i=1}^{N}r_i\cdot\frac{x^2}{k^2\ln^i\frac{x}{k}}+O\left(\frac{x^2}{k^2\ln^{N+1}\frac{x}{k}}\right),$$

其中 r_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $r_1=\dfrac{1}{2}$.
于是利用上式我们不难推出

$$\begin{aligned}\sum_{n\in B}F(n)&=\sum_{\substack{n\le x\\ p|n,\ p>\sqrt{n}}}F(n)=\sum_{\substack{pk\le x\\ p>k}}F(pk)=\sum_{k\le\sqrt{x}}\sum_{k<p\le\frac{x}{k}}(F(k)+p)\\ &=\sum_{k\le\sqrt{x}}\sum_{k<p\le\frac{x}{k}}p+O\left(\sum_{k\le\sqrt{x}}\sum_{k<p\le\frac{x}{k}}k\right)=\sum_{k\le\sqrt{x}}\sum_{k<p\le\frac{x}{k}}p+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}\right)\\ &=\sum_{k\le\sqrt{x}}\left[\sum_{i=1}^{N}r_i\cdot\frac{x^2}{k^2\ln^i\frac{x}{k}}+O\left(\frac{x^2}{k^2\ln^{N+1}\frac{x}{k}}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} d_i \cdot \frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1} x}\right), \tag{4-2}$$

其中 d_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $d_1 = \frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12}$.

结合 (4-1) 及 (4-2) 立刻得到渐近公式:

$$\sum_{n\le x} F(n) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} F(n)) + \sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} F(n) = \sum_{i=1}^{N} d_i \cdot \frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1} x}\right).$$

于是证明了引理 4.1.2.

4.1.3 定理 4.1 及定理 4.2 的证明

这节我们利用初等方法以及分拆理论给出定理 4.1 及定理 4.2 的证明. 我们首先证明定理 4.1. 由数列 $\{P_d(n)\}$ 的定义并注意分拆恒等 (参阅文献 [8] 中定理 3.17) 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} F\left(P_d(n)\right)\\
= &\sum_{n\le x} F\left(n^{\frac{d(n)}{2}}\right) = \sum_{n\le x} \frac{1}{2} d(n) F(n)\\
= &\frac{1}{2}\sum_{nm\le x} F(mn) = \frac{1}{2}\sum_{nm\le x} \left(F(m)+F(n)\right) = \sum_{mn\le x} F(n)\\
= &\sum_{m\le\sqrt{x}}\sum_{n\le\frac{x}{m}} F(n) + \sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{m\le\frac{x}{n}} F(n) - \left(\sum_{m\le\sqrt{x}} F(m)\right)\cdot\left(\sum_{n\le\sqrt{x}} 1\right).
\end{aligned} \tag{4-3}$$

由引理 4.1.2 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{m\le\sqrt{x}}\sum_{n\le\frac{x}{m}} F(n) &= \sum_{m\le\sqrt{x}} \left[\sum_{i=1}^{N} d_i \cdot \frac{x^2}{m^2 \ln^i \frac{x}{m}} + O\left(\frac{x^2}{m^2 \ln^{N+1} x}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1} x}\right),
\end{aligned} \tag{4-4}$$

其中 u_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $u_1=d_1\cdot\zeta(2)=\dfrac{\pi^4}{72}$.

应用 Abel 恒等及引理 4.1.2 我们有估计式

$$\begin{aligned}\sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{m\le\frac{x}{n}}F(n) &= x\cdot\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{F(n)}{n}+O\left(\sum_{n\le\sqrt{x}}F(n)\right)\\ &= O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}\right). \qquad (4\text{-}5)\end{aligned}$$

同样显然也有估计式

$$\left(\sum_{m\le\sqrt{x}}F(n)\right)\cdot\left(\sum_{n\le\sqrt{x}}1\right)\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}. \qquad (4\text{-}6)$$

结合 (4-3), (4-4), (4-5) 及 (4-6) 立刻推出渐近公式:

$$\sum_{n\le x}F(P_d(n))=\sum_{i=1}^{N}u_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x}\right),$$

其中 u_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $u_1=\dfrac{\pi^4}{72}$. 于是证明了定理 4.1.

注意到定理 4.1 并应用同样的方法我们也可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}F(q_d(n)) &= \sum_{n\le x}\left(\frac{d(n)}{2}-1\right)F(n)=\frac{1}{2}\sum_{n\le x}d(n)F(n)-\sum_{n\le x}F(n)\\ &= \sum_{i=1}^{N}u_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}-\sum_{i=1}^{N}d_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{N}h_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x}\right),\end{aligned}$$

其中 $h_i=u_i-d_i$ $(i=1,\ 2,\cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $h_1=\dfrac{\pi^4}{72}-\dfrac{\pi^2}{12}$. 于是完成了定理 4.2 的证明.

4.2　关于可加函数的均方值

4.2.1　主要结论

上一节我们研究了函数 $F(n)$ 在一些特殊数列上的均值性质, 获得了两个较强的渐近公式. 作为这一工作的延伸, 本节我们考虑函数 $F(n)$ 的值分布性质. 即就是研究均方值 $(F(n)-P(n))^2$ 的均值性质, 并利用初等方法以及素数分布理论给出 $(F(n)-P(n))^2$ 的一个较强的均值公式. 具体地说也就是证明下面的:

定理 4.3. 设 N 为给定的正整数, 则对任意给定的实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}(F(n)-P(n))^2=\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\frac{x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+2}\sqrt{x}}\right),$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $c_1=\dfrac{\pi^2}{6}$.

定理 4.3 的意义在于它能够说明函数 $F(n)$ 的值主要集中在正整数 n 的最大素因子上. 因此这些信息给我们提供了一个控制函数 $F(n)$ 大小的重要途径.

4.2.2　定理 4.3 的证明

这节我们利用初等方法以及素数分布理论直接给出定理 4.3 的证明. 我们采用文献 [3] 中的思想. 首先定义四个集合 A, B, C, D 如下: $A=\{n,\ n\in N, n$ 恰好有一个素因子 p 满足 $n=kp, p>n^{\frac{1}{3}}$, k 的所有素因子 q 满足 $q<n^{\frac{1}{3}}\}$; $B=\{n,\ n\in N, n$ 有一个素因子 p 满足 $n=p^2\cdot k$, $p>n^{\frac{1}{3}}>k\}$; $C=\{n,\ n\in N, n$ 有两个素因子 p_1 及 p_2 满足 $n=p_1p_2k$, $p_2>p_1>n^{\frac{1}{3}}>k\}$; $D=\{n,\ n\in N, n$ 的所有素因子 p 满足 $p\le n^{\frac{1}{3}}\}$, 其中 N 表示所有正整数之集. 于是由集合 A, B, C 及 D 的定义可得

$$\sum_{n\le x}(F(n)-P(n))^2=\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}(F(n)-P(n))^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}(F(n)-P(n))^2$$

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}(F(n)-P(n))^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in D}}(F(n)-P(n))^2\\
\equiv\ & W_1+W_2+W_3+W_4. \qquad (4\text{-}7)
\end{aligned}
$$

现在我们利用初等方法以及素数分布理论来估计 (4-7) 中的各项. 首先我们估计 W_1. 注意到 $F(n)$ 为完全可加函数且当 $n\in A$ 且 $n=pk$, k 的所有素因子 q 满足 $q\le n^{\frac{1}{3}}$ 时, $F(k)\le n^{\frac{1}{3}}\ln n$ 以及素数分布定理 (参阅文献 [27] 中第三章定理 2)

$$
\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{i=1}^{k}c_i\cdot\frac{x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right), \qquad (4\text{-}8)
$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数且 $c_1=1$. 我们有估计式:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}(F(n)-P(n))^2=\sum_{\substack{pk\le x\\ (pk)\in A}}(F(pk)-p)^2\\
&= \sum_{\substack{pk\le x\\ (pk)\in A}}F^2(k)\ll\sum_{k\le\sqrt{x}}\sum_{k<p\le\frac{x}{k}}(pk)^{\frac{2}{3}}\ln^2(pk)\le(\ln x)^2\sum_{k\le\sqrt{x}}k^{\frac{2}{3}}\sum_{k<p\le\frac{x}{k}}p^{\frac{2}{3}}\\
&\ll (\ln x)^2\sum_{k\le\sqrt{x}}k^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{1}{\ln\frac{x}{k}}\ll x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x. \qquad (4\text{-}9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}(F(n)-P(n))^2=\sum_{\substack{p^2k\le x\\ p>k}}\left(F(p^2k)-p\right)^2\\
&= \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p\le\sqrt{\frac{x}{k}}}(F(k)+p)^2\ll\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p\le\sqrt{\frac{x}{k}}}p^2\\
&\ll \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}\ln x}\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}. \qquad (4\text{-}10)
\end{aligned}
$$

$$
W_4 = \sum_{\substack{n\le x\\ n\in D}}(F(n)-P(n))^2\ll\sum_{n\le x}n^{\frac{2}{3}}\ln^2 n\ll x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x. \qquad (4\text{-}11)
$$

最后我们估计主项 W_3. 注意到 $n\in C$ 时, $n=p_1p_2k$, 其中 $p_2>p_1>n^{\frac{1}{3}}>k$. 如果 $k<p_1<n^{\frac{1}{3}}$, 这种情况属于 W_1 的估计. 如果 $k<p_1<$

$p_2 < n^{\frac{1}{3}}$, 这种情况属于 W_4 的估计. 于是应用 (4-8) 式我们有

$$
\begin{aligned}
W_3 &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}} (F(n)-P(n))^2 = \sum_{\substack{p_1p_2k\le x\\ p_2>p_1>k}} (F(p_1p_2k)-p_2)^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x\right)\\
&= \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \sum_{p_2\le\frac{x}{p_1k}} \left(F^2(k)+2p_1F(k)+p_1^2\right) + O\left(x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x\right)\\
&= \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1k}} p_1^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x\right)\\
&\quad +O\left(\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1k}} kp_1\right)\\
&= \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} p_1^2\left(\sum_{i=1}^{N} c_i\cdot\frac{x}{p_1k\ln^i\frac{x}{p_1k}} + O\left(\frac{x}{p_1k\ln^{N+1}x}\right)\right)\\
&\quad +O\left(x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x\right) - \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \sum_{p_2\le p_1} p_1^2\\
&\quad +O\left(\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1k}} kp_1\right).
\end{aligned}
\tag{4-12}
$$

注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 应用 Abel 恒等 (参阅文献 [8] 中定理 4.2) 及 (4-8) 式我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} p_1^2 \sum_{p\le p_1} 1\\
&= \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} p_1^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i\cdot p_1}{\ln^i p_1} + O\left(\frac{p_1}{\ln^{N+1}p_1}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \frac{c_i\cdot p_1^3}{\ln^i p_1} + O\left(\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \frac{p_1^3}{\ln^{N+1}p_1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \frac{c_i\cdot p_1^3}{\ln^i p_1} + O\left(\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}} \frac{p_1^3}{\ln^{N+1}p_1}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{c_i x^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}\ln^i\sqrt{\frac{x}{k}}}\pi\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)-\int_2^{\sqrt{\frac{x}{k}}}\pi(y)d\left(\frac{c_i y^3}{\ln^i y}\right)\right)\\
&\quad +O\left(\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{p_1^3}{\ln^{N+1}p_1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{d_i\cdot x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{2^N\cdot x^2}{\ln^{N+2}x}\right), \qquad (4\text{-}13)
\end{aligned}$$

其中 d_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $d_1=\dfrac{\pi^2}{6}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}}\sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1k}}kp_1 &\ll \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}k\sum_{p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}}p_1\cdot\frac{x}{p_1k\ln x}\\
&\ll \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}\ln^2 x}\ll\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\ln^2 x}. \qquad (4\text{-}14)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{p_1x}{k\ln^{N+1}x}\ll\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^2}{k^2\ln^{N+2}x}\ll\frac{x^2}{\ln^{N+2}x}. \qquad (4\text{-}15)$$

同理应用 Abel 恒等, (4-8) 式以及 (4-13) 的证明方法我们也可以得到渐近式

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}}p_1^2\frac{x}{p_1k\ln\frac{x}{p_1k}}\\
&= \sum_{k\le x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{k}\sum_{k<p_1\le\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{xp_1}{\ln\frac{x}{kp_1}}\\
&= \sum_{i=1}^{N}a_i\cdot\frac{x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+2}x}\right), \qquad (4\text{-}16)
\end{aligned}$$

其中 a_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 是可计算的常数且 $a_1=\dfrac{\pi^2}{3}$.

于是结合 (4-7), (4-9), (4-10), (4-11), (4-12), (4-13), (4-14), (4-15) 及 (4-16) 我们立刻推出渐近公式:

$$\sum_{n\le x}(F(n)-P(n))^2 = \sum_{i=1}^{N}a_i\cdot\frac{x^2}{\ln^{i+1}x}-\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i\cdot x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+2}\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} h_i \cdot \frac{x^2}{\ln^{i+1} x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+2} \sqrt{x}}\right),$$

其中 $h_i = a_i - d_i$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 为可计算的常数且 $h_1 = a_1 - d_1 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$. 于是完成了定理 4.3 的证明.

第五章 关于 Smarandache 数列及其有关问题

5.1 Smarandache 平方数列 $SP(n)$ 和 $IP(n)$ 的均值差

定义 5.1. 对任意非负整数 n, 我们用 $SP(n)$ 表示 n 的 Smarandache 最小平方数, 即就是大于或等于 n 的最小完全平方数. 例如该数列的前几项为: 0, 1, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 25, $\cdots$.

定义 5.2. 用 $IP(n)$ 表示 n 的 Smarandache 最大平方数, 即就是不超过 n 的最大完全平方数. 这个数列的前几项为：0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 25, $\cdots$. 令

$$S_n = \left(SP\left(1\right) + SP\left(2\right) + \cdots + SP\left(n\right)\right)/n;$$

$$I_n = \left(IP\left(1\right) + IP\left(2\right) + \cdots + IP\left(n\right)\right)/n;$$

$$K_n = \sqrt[n]{SP\left(1\right) + SP\left(2\right) + \cdots SP\left(n\right)};$$

$$L_n = \sqrt[n]{IP\left(1\right) + IP\left(2\right) + \cdots IP\left(n\right)}.$$

在文献 [1] 中, F. Smarandache 教授提出了这两个数列, 并建议人们研究它的各种性质, 有关这些内容和有关背景参阅文献 [1]、[37]、[40] 及 [41]. 在文献 [40] 中, 日本 Kenichiro Kashihara 博士再次对这两个数列产生了兴趣, 同时提出了研究极限 $\dfrac{S_n}{I_n}$、$(S_n - I_n)$、$\dfrac{K_n}{L_n}$ 及 $(K_n - L_n)$ 的敛散性问题, 如果收敛, 并求其极限. 在文献 [41] 中, 苟素首次研究了这几个均值的渐近性问题, 并利用初等及解析方法证明了下面几个结论:

定理 A. 对于任意实数 $x > 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} SP\left(n\right) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right);$$

$$\sum_{n \leqslant x} IP\left(n\right) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

由此定理立刻推出下面的推论:

推论 1. 对任意正整数 n, 有渐近式

$$\frac{S_n}{I_n} = 1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ 及极限式 } \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{I_n} = 1.$$

推论 2. 对任意正整数 n, 有渐近式

$$\frac{K_n}{L_n} = 1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ 及极限式} \lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{L_n} = 1, \ \lim_{n\to\infty} (K_n - L_n) = 0.$$

然而, 关于 $S_n - I_n$ 的渐近性问题, 似乎没有在文献 [41] 中涉及到. 然而, 我们认为这一问题是有趣的, 其原因在于一方面它的解决可以对文献 [40] 中的问题作以完整的回答, 画上圆满的句号; 另一方面还可以刻画出两种数列 $SP(n)$ 及 $IP(n)$ 的本质区别. 本节叙述李粉菊 [42] 的工作, 基于文献 [41] 中的思想并结合同类项的合并以及误差项的精确处理, 她研究了 $S_n - I_n$ 的渐近性问题, 获得了一个较强的渐近公式, 具体地说也就是证明了下面的:

定理 5.1. 对于任意正整数 $n > 2$，我们有渐近公式

$$S_n - I_n = \frac{4}{3}\sqrt{n} + O(1).$$

显然本文中的结果弥补了文献 [41] 中的不足, 同时将文献 [40] 中对数列 S_n 及 I_n 提出的所有问题给予了解决. 当然, 由此定理我们还可以推出下面的极限:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - I_n)^{\frac{1}{n}} = 1 \ \text{ 及 } \ \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - I_n}{\sqrt{n}} = \frac{4}{3}.$$

证明: 下面我们用初等方法及 Euler 求和公式 (参阅文献 [8]) 分别对 S_n 及 I_n 进行非常精确的估计, 最终利用两个精确的估计给出定理 5.1 的证明. 对任意正整数 $n > 2$, 显然存在唯一的正整数 M 满足: $M^2 < n \leqslant (M+1)^2$, 即 $M = n^{\frac{1}{2}} + O(1)$. 于是有

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n} SP(k) = \frac{1}{n}\sum_{k\leqslant M^2} SP(k) + \frac{1}{n}\sum_{M^2<k\leqslant n} SP(k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\ \sum_{(h-1)^2<k\leqslant h^2} SP(k) + \frac{1}{n}\sum_{M^2<k\leqslant n}(M+1)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\left(h^2-(h-1)^2\right)h^2 + \frac{1}{n}\left(n-M^2\right)(M+1)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\left(2h^3-h^2\right) + \frac{1}{n}\left(n-M^2\right)(M+1)^2 \\
&= \frac{M^2(M+1)^2}{2n} - \frac{M(M+1)(2M+1)}{6n} + \frac{1}{n}\left(n-M^2\right)(M+1)^2 \\
&= (M+1)^2 - \frac{M(M+1)(2M+1)}{6n} - \frac{M^2(M+1)^2}{2n}. \qquad (5\text{-}1)
\end{aligned}
$$

同理, 根据 $IP(n)$ 的定义, 我们也有计算公式:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n} IP(k) = \frac{1}{n}\sum_{k<M^2} IP(k) + \frac{1}{n}\sum_{M^2\leqslant k\leqslant n} IP(k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\ \sum_{(h-1)^2\leqslant k<h^2} IP(k) + \frac{1}{n}\sum_{M^2\leqslant k\leqslant n} M^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\left(h^2-(h-1)^2\right)(h-1)^2 + \frac{1}{n}\left(n-M^2+1\right)M^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\left(2h^3-5h^2+4h-1\right) + \frac{1}{n}\left(n-M^2+1\right)M^2 \\
&= \frac{M^2(M+1)^2}{2n} - \frac{5M(M+1)(2M+1)}{6n} \\
&\quad + \frac{2M(M+1)}{n} - \frac{M}{n} + \frac{\left(n-M^2+1\right)M^2}{n} \\
&= M^2 - \frac{M^2(M^2-2M-3)}{2n} - \frac{5M(M+1)(2M+1)}{6n} \\
&\quad + \frac{2M^2+M}{n}. \qquad (5\text{-}2)
\end{aligned}
$$

于是由 (5-1) 及 (5-2) 式可得

$$
\begin{aligned}
& S_n - I_n \\
= {} & (M+1)^2 - \frac{M(M+1)(2M+1)}{6n} - \frac{M^2(M+1)^2}{2n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[M^2-\frac{M^2(M^2-2M-3)}{2n}-\frac{5M\,(M+1)\,(2M+1)}{6n}+\frac{2M^2+M}{n}\right]\\
=&\;\;2M+1-\frac{2M^3+7M}{3n}. \qquad (5\text{-}3)
\end{aligned}
$$

注意到 $M=n^{\frac{1}{2}}+O(1)$, 由 (5-3) 式我们立刻推出

$$
S_n-I_n=2M-\frac{2M}{3}+O(1)=\frac{4}{3}M+O(1)=\frac{4}{3}\sqrt{n}+O(1).
$$

于是完成了定理 5.1 的证明.

5.2 Smarandache $3n$-digital 数列

定义 5.3. 对任意的正整数 n, 著名的 Smarandache $3n$-digital 数列 $\{a_n\}$ 定义为: $\{a_n\}=\{13,\ 26,\ 39,\ 412,\ 515,\ 618,\ 721,\ \cdots\}$. 即, 对任意的整数 $b\in\{a_n\}$, 它可以分为两个部分, 其中第二部分是第一部分的 3 倍. 例如, $a_{28}=2884$, $a_{35}=35105$, $a_{104}=104312$, $\cdots$.

在文献 [1] 中 F. Smarandache 建议我们研究数列 $\{a(n)\}$ 的性质. 关于这一数列很多学者已经进行了研究并取得了一系列成果. 在文献 [43] 中, 卢晓萍和呼家源研究了这一数列的均值问题, 给出了以下定理:

定理 5.2. 对任意实数 $N>1$, 有渐近公式

$$
\sum_{n\le N}\frac{n}{a_n}=\frac{3}{10\ln 10}\cdot\ln N+O\left(1\right).
$$

证明: 我们用初等方法完成定理的证明. 首先, 对任意正整数 n, 令 $3n=b_{k(n)}b_{k(n)-1}\cdots b_2b_1$, 其中 $1\le b_{k(n)}\le 9$, $0\le b_i\le 9$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k(n)-1$. 由 a_n 的定义可知 a_n 可写为:

$$
a_n=n\cdot 10^{k(n)}+3n=n\cdot(10^{k(n)}+3).
$$

于是有

$$
\sum_{n\le N}\frac{n}{a_n}=\sum_{n\le N}\frac{1}{10^{k(n)}+3}.
$$

显然若 $N \leq 3$, 则

$$\sum_{n\leq N}\frac{n}{a_n}-\frac{3}{10}\log_{10}N$$

是一个常数. 因此, 不失一般性, 我们假设 $N>3$. 此时, 存在正整数 M 使得

$$\underbrace{33\cdots33}_{M}<N\leq\underbrace{33\cdots33}_{M+1}. \tag{5-4}$$

注意到, 对任意正整数 n, 若

$$\underbrace{33\cdots33}_{u-1}<n\leq\underbrace{33\cdots33}_{u},$$

则 $3n=b_ub_{u-1}\cdots b_2b_1$. 于是有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq N}\frac{n}{a_n}\\
=\ &\sum_{n\leq 3}\frac{1}{10+3}+\sum_{3<n\leq 33}\frac{1}{10^2+3}+\sum_{33<n\leq 333}\frac{1}{10^3+3}+\cdots\\
&\quad+\sum_{\underbrace{33\cdots33}_{M-1}<n\leq\underbrace{33\cdots33}_{M}}\frac{1}{10^M+3}+\sum_{\underbrace{33\cdots33}_{M}<n\leq N}\frac{1}{10^{M+1}+3}\\
=\ &\frac{3}{10+3}+\frac{30}{10^2+3}+\frac{300}{10^3+3}+\cdots+\frac{3\cdot10^{M-1}}{10^M+3}+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
=\ &\frac{3}{10}\left(\frac{10}{10+3}+\frac{10^2}{10^2+3}+\frac{10^3}{10^3+3}+\cdots+\frac{10^M}{10^M+3}\right)+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
=\ &\frac{3}{10}\left[\left(1-\frac{3}{10+3}\right)+\left(1-\frac{3}{10^2+3}\right)+\left(1-\frac{3}{10^3+3}\right)+\cdots\right.\\
&\left.+\left(1-\frac{3}{10^M+3}\right)\right]+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
=\ &\frac{3}{10}\left[M-\left(\frac{3}{10+3}+\frac{3}{10^2+3}+\frac{3}{10^3+3}+\cdots+\frac{3}{10^M+3}\right)\right]\\
&+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
=\ &\frac{3}{10}\cdot M-\frac{9}{10}\cdot\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{10^i+3}+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{10} \cdot M + O(1). \tag{5-5}$$

现在我们来估计 M, 由 (5-4) 式可得

$$10^M - 1 < 3N \le 10^{M+1} - 1$$

$$M \ln 10 + \ln\left(1 - \frac{1}{10^M}\right) < \ln(3N) \le (M+1)\ln 10 + \ln\left(1 - \frac{1}{10^{M+1}}\right)$$

$$\frac{\ln(3N)}{\ln 10} - \frac{\ln(1 - \frac{1}{10^{M+1}})}{\ln 10} - 1 \le M < \frac{\ln(3N)}{\ln 10} - \frac{\ln(1 - \frac{1}{10^M})}{\ln 10}.$$

注意到当 $N \to +\infty$ 时, $\ln(1 - \frac{1}{10^{M+1}}) \sim \frac{1}{10^M}$, $\ln(1 - \frac{1}{10^M}) \sim \frac{1}{10^M}$. 因而,

$$\frac{\ln 3N}{\ln 10} - 1 - O\left(\frac{1}{10^M}\right) \le M < \frac{\ln 3N}{\ln 10} - O\left(\frac{1}{10^M}\right).$$

结合此式和 (5-5) 式, 立刻推出

$$\sum_{n \le N} \frac{n}{a_n} = \frac{3}{10 \ln 10} \cdot \ln N + O(1).$$

这就完成了定理的证明.

关于这一数列, 张文鹏教授还提出了如下猜想:

猜想. 在 Smarandache $3n$-digital 数列中不存在完全平方数. 即, 方程

$$a_n = m^2 \tag{5-6}$$

没有正整数解.

在文献 [44] 中, 武楠研究了这一问题并证明了: 当 n 是完全平方数和无平方因子数时, a_n 不是完全平方数. 而对其余整数 n, 张文鹏教授的猜想是否正确仍是一个公开的问题. 最近, 杨明 [45] 对这一问题进行了研究, 进一步部分解决了这一猜想, 即给出了下面的定理:

定理 5.3. 方程 (5-6) 有正整数解, 且其部分解可表示为:

$$n = \frac{n_1^2 \cdot (10^{p\,(p-1)\,i+k_0} + 3)}{p^2},$$

其中 $p^2 \mid (10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3)$, $\dfrac{\sqrt{30}\,p}{30} < n_1 < \dfrac{\sqrt{3}\,p}{3}$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$.

定理 5.4. 对任意正整数 $k \geq 1$, 在 Smarandache kn-digital 数列 $\{a_k(n)\}$ 中存在无限个完全平方数. 其中, 方程 $a_k(n) = m^2$ 的部分解可表示为

$$n = \frac{n_1^2 \cdot (10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+k)}{p^2},$$

其中 $p^2 \mid (10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+k)$, $\dfrac{\sqrt{10\,k}\,p}{10\,k} < n_1 < \dfrac{\sqrt{k}\,p}{k}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$.

由以上的定理易得出以下推论:

推论 5.2.1. 对任意正整数 b, 若 $b^2 \mid (10^{k_0}+3)$, 则方程 (5-6) 的解为

$$n = \frac{n_1^2 \cdot (10^{k_0}+3)}{b^2},$$

其中 $\dfrac{\sqrt{30}\,b}{30} < n_1 < \dfrac{\sqrt{3}\,b}{3}$.

推论 5.2.2. 对任意正整数 b, 若 $b^2 \mid (10^{k_0}+k)$, 则方程 (5-6) 的解为

$$n = \frac{n_1^2 \cdot (10^{k_0}+k)}{b^2},$$

其中 $\dfrac{\sqrt{10k}\,b}{10k} < n_1 < \dfrac{\sqrt{k}\,b}{k}$.

为了完成定理的证明, 我们需要以下几个引理:

引理 5.2.1. 对素数 p, 若 $p^2 \mid (10^{k_0}+3)$, 则 $p^2 \mid (10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3)$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$.

证明: 易知当 $p \mid (10^k+3)$ 时, $(p \neq 2, 5)$, 于是 $(10,\ p^2) = 1$. 由 Euler 定理, 得 $10^{\phi(p^2)} \equiv 1 \pmod{p^2}$. 注意到 $p^2 \mid (10^{k_0}+3)$, 于是

$$10^{p\,(p-1)i+k_0} \equiv -3 \pmod{p^2},\ \text{其中}\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

从而

$$p^2 \mid (10^{p\,(p-1)i+k_0}+3),\ \text{其中}\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

这就完成了引理 5.2.1 的证明.

引理 5.2.2. 对素数 p, 若 $p^2 \nmid (10^{p-1}-1)$, 则存在一个最小正整数 $p\,\delta$ 使得 $10^{p\,\delta} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

证明: 令 $\delta = \min\{d : 10^d \equiv 1 \pmod{p},\ d \mid (p-1)\}$. 因为 $p^2 \nmid (10^{p-1}-1)$, 所以 $p^2 \nmid (10^{\delta}-1)$ 且

$$1+10^{\delta}+10^{2\delta}+\cdots+10^{(p-1)\delta} \equiv p \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(10^{\delta}-1)\,(10^{(p-1)\delta}+10^{(p-2)\delta}+\cdots+10^{\delta}+1) \equiv 10^{p\,\delta}-1 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

如果存在另一个正整数 u 使得 $p^2 \mid (10^u-1)$ 且 $u < p\,\delta$, 则 $\delta < u < p\,\delta$. 显然 $\delta \mid u$. 令 $u = k\,\delta (1<k<p)$, 因为 $1+10^{\delta}+10^{2\delta}+\cdots+10^{(k-1)\delta} \equiv k \not\equiv 0 \pmod{p}$, 所以 $p \nmid (1+10^{\delta}+10^{2\delta}+\cdots+10^{(k-1)\delta})$, 且 $p^2 \nmid (10^{\delta}-1)$, 于是有 $p^2 \nmid (10^{\delta}-1)(1+10^{\delta}+10^{2\delta}+\cdots+10^{(k-1)\delta})$, 即 $p^2 \nmid (10^{k\,\delta}-1)$, 得到矛盾.

这就完成了引理 5.2.2 的证明.

引理 5.2.3. 存在素数 p 和正整数 k_0 使得 $p^2 \mid (10^{k_0}+3)$.

证明: 对任意正整数 k, 将 k 分为如下三个区间:

$A = \{k \mid 10^k+3 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 其中至少存在一个$\alpha_i \geq 2, 1 \leq i \leq r\}$,

$B = \{k \mid 10^k+3 = p_1p_2\cdots p_r$, 其中至少存在一个$p_i, 1 \leq i \leq r$满足 $p_i^2 \nmid (10^{p-1}-1)\}$,

$C = \{k \mid 10^k+3 = p_1p_2\cdots p_r$, 对任意的$p_i, 1 \leq i \leq r$, 满足 $p_i^2 \mid (10^{p-1}-1)\}$.

我们分以下几种情况来讨论:

情况 1. 如果 $k \in A$, 则存在一个正整数 $\alpha_i \geq 2\ (1 \leq i \leq r)$, 于是 $p_i^2 \mid (10^k+3)$. 引理 5.2.3 得证.

情况 2. 如果 $k \in B$, 在 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 中至少存在一个素数 p, 使得 $p^2 \nmid (10^{p-1}-1)$. 易知 $p \mid (10^k+3)$ 且 $(p, 10) = 1$. 由引理 5.2.2 知, $p^2 \nmid (10^{\delta}-1)$ 且

$$10^{\delta\,i+k_1} \equiv -3 \pmod{p},\ \text{其中}\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_1 \equiv k \pmod{\delta}.$$

对任意的 $i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$, $\dfrac{10^{\delta\,i+k_1}+3}{p}$ 遍历 p 的完全剩余系.

此外, 若存在 i, j 使得 $\dfrac{10^{\delta\, i+k_1}+3}{p} \equiv \dfrac{10^{\delta\, j+k_1}+3}{p} \pmod{p}$, 其中 $0 \le i < j < p-1$, 则 $p^2 \mid 10^{\delta\, i+k_1}(10^{\delta(j-i)}-1)$, 于是 $p^2 \mid (10^{\delta(j-i)}-1)$. 即, $10^{\delta(j-i)} \equiv 1 \pmod{p^2}$, $1 \le j-i \le p-1$. 由引理 5.2.2 知, $p\,\delta$ 是形如 $10^{p\,\delta} \equiv 1 \pmod{p^2}$ 中的最小正整数, 且 $p\,\delta \mid \delta(j-i)$, 即 $p \mid (j-i)$, 得到矛盾.

于是我们得到一个 i_0 $(0 \le i_0 < p-1)$ 使得 $\dfrac{10^{\delta\, i_0+k_1}+3}{p} \equiv 0 \pmod{p}$, 即 $p^2 \mid (10^{\delta\, i_0+k_1}+3)$, 且若 $k_0 = \delta\, i_0 + k_1$, 则

$$p^2 \mid (10^{k_0}+3).$$

情况 3. 对任意素数 p, 在 p_1, p_2, $\ldots$, p_r 中, 如果 $k \in C$ 且 $p^2 \mid (10^{p-1}-1)$, 则 $10^{(p-1)j+k}+3 \equiv 10^k+3 \pmod{p^2}$ $(j=0,1,\cdots)$. 即, $p^2 \nmid (10^{(p-1)j+k}+3), j=0,1,\cdots$.

综上, 易得

$$A \neq \emptyset \text{ 或 } B \neq \emptyset.$$

此外, $k \in C$ 且 $10^k+3 = p_1 p_2 \cdots p_r$. 对任意的 p_i $(1 \le i \le r), p_i^2 \mid (10^{p_i-1}-1)$. 这是不可能的.

例如, 当 $k=34$ 时 $49 \mid (10^{34}+3)$, $k \in A$. 当 $k=1$ 时 $k \in B$, 这就完成了引理 5.2.3 的证明.

定理的证明: 下面我们将完成定理的证明. 首先, 证明定理 5.3.

令 n 是 k 进制正整数, 于是从 $\{a_n\}$ 的定义知,

$$a_n = n \cdot (10^{k+1}+3),$$

或

$$a_n = n \cdot (10^{k+2}+3).$$

结合武楠 [44] 的结果, 容易得出以下结论: 如果 $10^{k+1}+3$ 或 $10^{k+2}+3$ 是一个无平方因子数, 则 a_n 不是一个完全平方数. 从而, 若 a_n 是一个完全平方数, 则 $10^{k+1}+3$ 或 $10^{k+2}+3$ 必须是平方数. 现在, 我们通过平方数 $10^{k+1}+3$ 或 $10^{k+2}+3$ 构造方程 (5-6) 的正整数解.

从引理 5.2.1 和引理 5.2.3 知, 存在素数 p 和正整数 k_0 使得

$$p^2 \mid (10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3), \text{ 其中 } i=0,1,2,\ldots.$$

若
$$n = n_1^2 \cdot \frac{10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3}{p^2},$$
$\frac{1}{10} < \frac{3\,n_1^2}{p^2} < 1$ (即 $\frac{\sqrt{30}\,p}{30} < n_1 < \frac{\sqrt{3}\,p}{3}$), 则 $3n = \frac{3\,n_1^2}{p^2} \cdot (10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3)$, 于是得到
$$\begin{aligned} a_n &= n_1^2 \cdot \frac{10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3}{p^2} \cdot (10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3) \\ &= n_1^2 \cdot p^2 \cdot (\frac{10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3}{p^2})^2. \end{aligned}$$

若
$$m = n_1 \cdot \frac{10^{p\,(p-1)\,i+k_0}+3}{p}, \text{其中 } i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{\sqrt{30}\ p}{30} < n_1 < \frac{\sqrt{3}\ p}{3}, \tag{5-7}$$
于是 (5-7) 是方程 (5-6) 的解, 这就完成了定理 5.3 的证明. 用类似的方法即可证明定理 5.4.

第六章　一些包含 Smarandache 函数的方程

6.1　包含伪 Smarandache 函数和 Smarandache LCM 函数的方程

在第二章中我们给出了 Smarandache LCM 函数的定义, 即对任意正整数 n, $SL(n)$ 定义为最小正整数 k, 使得 $n \mid [1,\ 2,\ \cdots,\ k]$, 这里 $[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 表示 1, 2, $\cdots$, k 的最小公倍数. 不难验证, 当 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}.$$

下面我们介绍以下这个函数:

定义 6.1. 伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小正整数 k, 使得 $n \mid \dfrac{k(k+1)}{2}$, 即

$$Z(n) = \min\left\{m:\ m \in \mathbf{N},\ n \mid \frac{m(m+1)}{2}\right\}.$$

关于这个函数的初等性质, 虽然我们至今知道的不多, 但已吸引不少学者进行研究, 并获得了一些有价值的研究成果. 例如, Kenichiro Kashihara 和 David Gorski 研究了函数 $Z(n)$ 的初等性质, 并且证明了一些有趣的结果:

对任意的素数 $p \geq 3$, $Z(p) = p - 1$;

对任意的素数 $p \geq 3$ 和任意的 $k \in \mathbf{N}, Z(p^k) = p^k - 1$;

对任意的 $k \in \mathbf{N}, Z(2^k) = 2^{k+1} - 1$;

对任意整数 $k > 0$, 如果 n 不能表示为 2^k 的形式, 那么 $Z(n) < n$.

李彩娟 [46] 研究了方程

$$Z(n) = SL(n),\ Z(n) + 1 = SL(n)$$

的可解性, 并利用初等及解析方法获得了这两个方程的所有正整数解. 具体地说也就是证明了下面两个结论:

定理 6.1. 对任意正整数 $n>1$, 方程

$$Z(n)=SL(n)$$

成立当且仅当 $n=p^a\cdot m$, 其中 p 为奇素数, $a\geq 1$, 及 m 为 $\dfrac{p^a+1}{2}$ 的任意大于 1 的因数.

定理 6.2. 对任意正整数 $n>1$, 方程

$$Z(n)+1=SL(n)$$

成立当且仅当 $n=p^a\cdot m$, 其中 p 为奇素数, $a\geq 1$, 及 m 为 $\dfrac{p^a-1}{2}$ 的任意因数.

证明: 以下我们将直接给出定理的证明. 首先我们证明定理 6.1. 当 $n=1$, 显然有 $Z(n)=SL(n)$. 经验证当 $n=2$, 3, 4, 5 时, n 不满足方程 $Z(n)=SL(n)$, 于是假定 $n\geq 6$ 且满足方程 $Z(n)=SL(n)$, 不妨设 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ 为 n 的标准分解式, 且 $p_1<p_2<p_3\cdots<p_r$, 并令 $Z(n)=SL(n)=k$, 由函数 $Z(n)$ 及 $SL(n)$ 的定义可知 k 是最小正整数使得 n 满足下面的两个整除式:

$$n\mid[1,2,\cdots,k],\ n\mid\frac{k(k+1)}{2}.$$

由函数 $SL(n)$ 的性质: 对任意正整数 n, 有 $SL(n)=\max\{p_1^{a_1},p_2^{a_2},\cdots,p_r^{a_r}\}$, 由此可以推出 $k=p^a$.

I. 当 k 是奇数时:

(1) 取 $a=1$, 易知 $Z(n)=SL(n)=p$, 根据 $SL(n)$ 的上述性质, 可令 $n=p\cdot m$, $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_i^{a_i}$, 其中 $a_i\geq 0$ 且 $p\geq p_i^{a_i}, i=1,2,3,\cdots,r-1$.

此时显然有 $SL(n)=p$, 又有 $n\mid\dfrac{k(k+1)}{2}$, 可得, $p\cdot m\mid\dfrac{p(p+1)}{2}$, 即 $m\mid\dfrac{p+1}{2}$.

当 $m=1$ 时, $n=p, Z(p)=p-1,\ SL(p)=p$ 显然 $Z(n)\neq SL(n)$, 所以 $m=1$ 不满足方程.

当 $m\neq 1$ 时, $SL(p\cdot m)=p$ 且 $Z(p\cdot m)=p$, 这是因为 m 不整除 $\dfrac{p(p-1)}{2}$, 否则与 $m\mid\dfrac{p+1}{2}$ 矛盾.

所以 $Z(m\cdot p)=SL(m\cdot p)=p$, 当 $n=p\cdot m$, $m\mid\dfrac{(p+1)}{2}$ 且 $m>1$.

(2) 取 $a\neq 1$, 我们有 $Z(n)=SL(n)=p^a$, 同理可令 $n=p^a\cdot m_1$, $m_1=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_i^{a_i}$, 其中 $a_i\geq 0$ 且 $p^a\geq p_i^{a_i}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r-1$. 由 (1) 知, $m_1\mid\dfrac{p^a+1}{2}$,

当 $m_1=1$ 时, $n=p^a$, $Z(p^a)=p^a-1$, $SL(p^a)=p^a$, 显然 $Z(n)\neq SL(n)$, 所以 $m_1=1$ 不满足方程.

当 $m_1\neq 1$ 时, $SL(p^a\cdot m_1)=p^a$ 且 $Z(p^a\cdot m_1)=p^a$, 这是因为 m_1 不整除 $\dfrac{p^a(p^a-1)}{2}$, 否则, 由 $(m_1,\ p^a)=1$, 易知, $m_1\mid\dfrac{p^a-1}{2}$, 这与 $m_1\mid\dfrac{p^a+1}{2}$ 矛盾.

所以 $Z(p^a\cdot m_1)=SL(p^a\cdot m_1)$, 当 $n=p^a\cdot m_1$, $m_1\mid\dfrac{(p^a+1)}{2}$ 且 $m_1>1$.

II. 当 k 是偶数时:

由 $Z(n)=SL(n)=k$, $k=p^a$ 知:

(1) 取 $a=1$, 我们有 $Z(n)=SL(n)=2$, 由于 $n\mid\dfrac{2\times 3}{2}$, 即 $n\mid 3$, 知 $n=1$ 或 $n=3$, 显然这与 $n\geq 6$ 矛盾. 所以 $p=2$ 时, 方程无解.

(2) 取 $a\neq 1$, 我们有 $Z(n)=SL(n)=2^a$, 同理可令 $n=2^a\cdot m_2$, $m_2=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_i^{a_i}$, 其中 $a_i\geq 0$ 且 $2^a\geq p_i^{a_i}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r-1$. 如上述知: $2^am\mid\dfrac{2^a(2^a-1)}{2}$, 即 $m\mid\dfrac{(2^a-1)}{2}$.

当 $m=1$ 时, $n=2^a$, 显然有 $Z(2^a)=2^{a+1}-1$, $SL(2^a)=2^a$, 要满足方程必须有 $2^{a+1}-1=2^a$, 即 $a=0$, 得 $n=1$, 这与 $n\geq 6$ 矛盾. 所以 $p=2$ 方程无解.

当 $m\neq 1$ 时, 显然 $SL(2^a\cdot m)=2^a$, 要满足方程需要 $Z(2^am)=2^a$, 由 $Z(n)$ 的定义知: $2^am\mid\dfrac{2^a(2^a-1)}{2}$, 于是有 $2m\mid 2^a-1$, 显然不成立. 所以 $p=2^a$ 方程无解.

现在证明定理 6.2. 与定理 6.1 的证明方法相似, 这里只给出大概的证明过程. 显然 $n=1,2$ 不满足方程 $Z(n)+1=SL(n)$. 于是假定 $n\geq 3$ 时且满足方程 $Z(n)+1=SL(n)$, 不妨设 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ 为 n 的标准分解式, 并令 $Z(n)+1=SL(n)=k$, 由函数 $Z(n)$ 及 $SL(n)$ 的定义可知 k 是最小正整数使得 n 满足下面的两个整除式:

$$n\mid[1,2,\cdots,k],\ n\mid\frac{k(k-1)}{2}.$$

由函数 $SL(n)$ 的性质: 由此可以推出 $k = p^a$

I. 当 k 是奇数时:

(1) 取 $a = 1$, 我们有 $Z(n) + 1 = SL(n)$, 根据 $SL(n)$ 的上述性质, 可令 $n = p \cdot m$, $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_i^{a_i}$, 其中 $a_i \geq 0$ 且 $p \geq p_i^{a_i}$, $i = 1, 2, 3, \cdots, r-1$.

此时显然有 $SL(n) = p$, 又有 $n \mid \dfrac{k(k-1)}{2}$, 可得, $p \cdot m \mid \dfrac{p(p-1)}{2}$, 即 $m \mid \dfrac{p-1}{2}$.

当 $m = 1$ 时, $n = p, Z(p-1) = p-1$, $SL(p) = p$, 显然 $Z(n) + 1 = SL(n)$, 所以 $m = 1$ 满足方程.

当 $m \neq 1$ 时, $SL(p \cdot m) = p$ 且 $Z(p \cdot m) = p - 1$, 这是因为由 $pm \mid \dfrac{p(p-1)}{2}$ 知 $Z(n) \leq p-1$, 根据 $Z(n)$ 的性质: $Z(n) \geq \max\{Z(m) : m \mid n\}$, 易知 $Z(n) \geq Z(p) = p-1$, 故 $Z(p) = p-1$. 此时满足方程 $Z(n) + 1 = SL(n)$.

(2) 取 $a \neq 1$, 我们有 $Z(n) + 1 = SL(n) = p^a$, 同理可令 $n = p^a \cdot m_1$, $m_1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_i^{a_i}$, 其中 $a_i \geq 0$ 且 $p^a \geq p_i^{a_i}$, $i = 1, 2, 3, \cdots, r-1$. 此时显然有 $SL(p) = p^a$ 和 $m_1 \mid \dfrac{p^a - 1}{2}$.

当 $m_1 = 1$ 时, $n = p^a$, $Z(p^a) = p^a - 1$, $SL(p^a) = p^a$, 显然 $Z(n) + 1 = SL(n)$, 所以 $m_1 = 1$ 满足方程.

当 $m_1 \neq 1$ 时, $SL(p^a \cdot m_1) = p^a$ 且 $Z(p^a \cdot m_1) = p^a - 1$, 这是因为由 $p^a m_1 \mid \dfrac{p^a(p^a - 1)}{2}$ 知, $Z(n) \leq p^a - 1$, 根据 $Z(n)$ 的性质: $Z(n) \geq \max\{Z(m) : m \mid n\}$, 易知 $Z(n) \geq Z(p^a) = p^a - 1$, 故 $Z(p^a) = p^a - 1$. 此时满足方程 $Z(n) + 1 = SL(n)$.

II. 当 k 是偶数时:

由 $Z(n) + 1 = SL(n) = k$, $k = p^a$ 知:

(1) 取 $a = 1$, 我们有 $Z(n) + 1 = SL(n) = 2$, 由于 $n \mid \dfrac{1 \times 2}{2}$, 知 $n = 1$ 与 $n \geq 3$, 矛盾. 显然不满足方程. 所以 $p = 2$ 时, 方程无解.

(2) 取 $a \neq 1$, 我们有 $Z(n) + 1 = SL(n) = 2^a$, 同理可令 $n = 2^a \cdot m_2$, $m_2 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_i^{a_i}$, 其中 $a_i \geq 0$ 且 $2^a \geq p_i^{a_i}$, $i = 1, 2, 3, \cdots, r-1$. 如上述知: $2^a m \mid \dfrac{2^a(2^a - 1)}{2}$, 即 $m \mid \dfrac{(2^a - 1)}{2}$. 所以 $p = 2$ 时, 方程无解.

综合以上几种情况, 我们立刻完成定理 6.2 的证明.

关于伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 和 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$,

吴欣 [47] 也对其进行了研究, 并给出了方程

$$Z(n)+SL(n)=n$$

的所有正整数解, 即给出了下面的定理:

定理 6.3. 对任意正整数 n, 方程

$$Z(n)+SL(n)=n$$

的所有正整数解可表示为: $n=2^k p^\alpha$, 其中 $p>2$ 是素数, k 和 α 是满足以下条件的正整数:

1. 当 $2^k>p^\alpha$ 时, $p^\alpha \mid (2^k-1)$.
2. 当 $2^k<p^\alpha$ 时, $2^k \mid (p^\alpha-1)$, $2^{k+1} \nmid (p^\alpha-1)$.

证明: 下面我们将用初等方法并结合同余思想完成定理的证明.

显然 $n=6$ 是方程 $Z(n)+SL(n)=n$ 的一个解. 现在我们假定 $n=2^k\cdot s$, 其中 s 为奇数, 下面分几种情况来讨论:

(a). 若 n 为奇数, 则 $k=0$, $n=s$.

(1) 令 $s=1$, 则 $Z(1)=1, SL(1)=1$. 于是 $Z(1)+SL(1)=2\neq 1$.

(2) 令 $s=p$, p 是奇素数, 则 $SL(p)=p$, $Z(p)=p-1$. 于是

$$Z(p)+SL(p)=2p-1\neq p.$$

(3) 令 $s=p^\alpha$, p 是奇素数, α 为正整数, 于是 $SL\left(p^\alpha\right)=p^\alpha$, $Z(p^\alpha)=p^\alpha-1$. 从而有 $Z(p^\alpha)+SL(p^\alpha)=2p^\alpha-1\neq p^\alpha$.

(4) 令 $s=p^\alpha\cdot p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 其中 p, p_1, p_2, $\cdots$, p_r 是奇素数, α 为正整数, p^α 是 s 的最大素数方幂. 即,

$$p^\alpha=\max\left\{p^\alpha,\ p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_r^{\alpha_r}\right\}.$$

令 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}=t$, 则 $s=p^\alpha\cdot t$. 于是 $SL(n)=p^\alpha$.

若 $Z(n)=n-SL(n)=p^\alpha(t-1)$, 由 $Z(n)$ 的定义知,

$$p^\alpha\cdot t \mid \frac{p^\alpha(t-1)[p^\alpha(t-1)+1]}{2}.$$

故 $t\mid(p^\alpha-1)$. 但此时, 若取 $m=p^\alpha-1$, 同样可得 $n=p^\alpha\cdot t$ 整除 $\dfrac{m(m+1)}{2}$. 注意到 $p^\alpha-1<p^\alpha(t-1)$. 因而在此情况下方程无解.

由 (1)-(4) 可知方程无奇数解.

(b). 若 n 为偶数, 则 $k \neq 0$.

(1) 令 $s=1$, 则 $n=2^k$, 于是 $Z(2^k)=2^{k+1}-1,\ SL(2^k)=2^k$. 从而

$$Z(2^k)+SL(2^k)=3\cdot 2^k-1\neq 2^k.$$

(2) 令 $s=p$, 则 $n=2^k\cdot p$, p 为奇素数, k 为正整数.

此时, 若 $2^k>p$, 则 $SL(n)=2^k$, 若满足 $Z(n)+SL(n)=n$, 则

$$Z(n)=m=n-SL(n)=2^kp-2^k=2^k(p-1).$$

由 $Z(n)$ 的定义可知,

$$2^k\cdot p \mid \frac{2^k(p-1)(2^k(p-1)+1)}{2}.$$

于是可得 $p\mid(2^k-1)$. 现在我们来证明 $m=2^k(p-1)$ 是满足 $Z(n)$ 定义的最小值. 由 $Z(n)$ 的性质, 知 $Z(n)\geq 2^{k+1}-1$, 且 $Z(n)$ 可能的取值介于 $2^{k+1}-1$ 和 $2^{k+1}\cdot\dfrac{p-1}{2}$ 之间, 有如下两种:

A. $2^{k+1}-1,\ 2^{k+1}\cdot 2-1,\ \cdots,\ 2^{k+1}\cdot\dfrac{p-1}{2}-1.$

记这组数为 $2^{k+1}\cdot s_1-1, s_1\in\{1,2,\cdots,\dfrac{p-1}{2}\}$.

$$2^{k+1}\cdot s_1-1\equiv 2s_1-1 \pmod p.$$

故可得 $1\leq 2s_1-1\leq p-2$. 于是 $p\nmid(2^{k+1}\cdot s_1-1)$.

B. $2^{k+1},\ 2^{k+1}\cdot 2,\ \cdots,\ 2^{k+1}\cdot(\dfrac{p-1}{2}-1).$

记这组数为 $2^{k+1}\cdot s_2, s_2\in\{1,2,\cdots,\dfrac{p-1}{2}-1\}$.

$$2^{k+1}\cdot s_2\equiv 2s_2 \pmod p.$$

故可得 $2\leq 2s_2\leq p-3$. 于是 $p\nmid 2^{k+1}\cdot s_2$.

若 $2^k<p$, 则 $SL(n)=p$, 若满足 $Z(n)+SL(n)=n$, 则

$$Z(n)=m=n-SL(n)=p(2^k-1).$$

故可得

$$n=2^k\cdot p\mid\frac{p(2^k-1)(p(2^k-1)+1)}{2}.$$

因而, $2^{k+1} \mid [(2^k-1)p+1]$. 即, $2^k \mid (p-1)$, $2^{k+1} \nmid (p-1)$.

下证 $m = p(2^k-1)$ 是满足 $Z(n)$ 定义的最小值. 由 $Z(n)$ 的性质知, $Z(n) \geq p-1$, $Z(n)$ 在 $p-1$ 和 $p(2^k-1)$ 之间的可能值为:

C. $p-1,\ p\cdot 2-1,\ \cdots,\ p\cdot(2^k-1)-1$.

记这组数为 $p\cdot s_1-1, s_1 \in \{1,2,\cdots,2^k-1\}$.

$$p\cdot s_1-1 \equiv s_1-1 \pmod{2^k}.$$

故可得 $0 \leq s_1-1 \leq 2^k-2$. 当 $s_1-1=0$ 时, $s_1=1$, 于是 $m=p-1$, $2^{k+1} \mid (p-1)$. 从而得到矛盾. 故 $2^k \nmid (p\cdot s_1-1)$.

D. $p,\ p\cdot 2,\ \cdots,\ p\cdot(2^k-2)$.

记这组数为 $p\cdot s_2, s_2 \in \{1,2,\cdots,2^k-2\}$.

$$p\cdot s_2 \equiv s_2 \pmod{2^k}.$$

故可得 $1 \leq s_2 \leq 2^k-2$. 于是 $2^k \nmid p\cdot s_2$.

(3) 令 $s=p^\alpha$, $n=2^k\cdot p^\alpha$, p 为奇素数, k、α 为正整数.

此时, 若 $2^k > p^\alpha$, 则 $SL(n)=2^k$. 当 $Z(n)+SL(n)=n$ 时, 可知 $Z(n)=m=n-SL(n)=2^k(p^\alpha-1)$. 由 $Z(n)$ 定义知,

$$2^k\cdot p^\alpha \mid \frac{2^k(p^\alpha-1)(2^k(p^\alpha-1)+1)}{2}.$$

因此 $p^\alpha \mid (2^k-1)$.

下证 $m=2^k(p^\alpha-1)$ 是满足 $Z(n)$ 定义的最小值. 由 $Z(n)$ 的性质, 有 $Z(n) \geq 2^{k+1}-1$, $Z(n)$ 在 $2^{k+1}-1$ 和 $2^{k+1}\cdot\frac{p^\alpha-1}{2}$ 之间的可能值有:

A. $2^{k+1}-1,\ 2^{k+1}\cdot 2-1,\ \cdots,\ 2^{k+1}\cdot\frac{p^\alpha-1}{2}-1$.

记这组数为 $2^{k+1}\cdot s_1-1, s_1 \in \{1,2,\cdots,\frac{p^\alpha-1}{2}\}$.

$$2^{k+1}\cdot s_1-1 \equiv 2s_1-1 \pmod{p^\alpha}.$$

故可得 $1 \leq 2s_1-1 \leq p^\alpha-2$. 于是 $p^\alpha \nmid (2^{k+1}\cdot s_1-1)$.

B. $2^{k+1},\ 2^{k+1}\cdot 2,\ \cdots,\ 2^{k+1}\cdot(\frac{p^\alpha-1}{2}-1)$.

记这组数为 $2^{k+1}\cdot s_2, s_2 \in \{1,2,\cdots,\frac{p^\alpha-1}{2}-1\}$.

$$2^{k+1}\cdot s_2 \equiv 2s_2 \pmod{p^\alpha}.$$

故可得 $2 \leq 2s_2 \leq p-3$. 于是 $p^\alpha \nmid 2^{k+1} \cdot s_2$.

若 $2^k < p^\alpha$, 则 $SL(n) = p^\alpha$, 由 $Z(n) + SL(n) = n$ 可推出 $Z(n) = m = n - SL(n) = p^\alpha \left(2^k - 1\right)$. 因而,

$$n = 2^k \cdot p^\alpha \mid \frac{p^\alpha \left(2^k-1\right)\left(p^\alpha \left(2^k-1\right)+1\right)}{2}.$$

由此易推出 $2^k \mid (p^\alpha - 1)$ 且 $2^{k+1} \nmid (p^\alpha - 1)$.

下证 $m = p^\alpha(2^k - 1)$ 是满足 $Z(n)$ 定义的最小值. 由 $Z(n)$ 定义, 有 $Z(n) \geq p^\alpha - 1$, $Z(n)$ 在 $p^\alpha - 1$ 和 $p^\alpha(2^k - 1)$ 之间的可能值为:

C. $p^\alpha - 1,\ p^\alpha \cdot 2 - 1,\ \cdots,\ p^\alpha \cdot (2^k - 1) - 1$.

记这组数为 $p^\alpha \cdot s_1 - 1, s_1 \in \{1, 2, \cdots, 2^k - 1\}$.

$$p^\alpha \cdot s_1 - 1 \equiv s_1 - 1 \pmod{2^k}.$$

故可得 $0 \leq s_1 - 1 \leq 2^k - 2$. 当 $s_1 - 1 = 0$ 时, $s_1 = 1$, $m = p^\alpha - 1$, $2^{k+1} \mid (p^\alpha - 1)$. 由此我们得到矛盾. 因而 $2^k \nmid (p^\alpha \cdot s_1 - 1)$.

D. $p^\alpha,\ p^\alpha \cdot 2,\ \cdots,\ p^\alpha \cdot (2^k - 2)$.

记这组数为 $p^\alpha \cdot s_2, s_2 \in \{1, 2, \cdots, 2^k - 2\}$.

$$p^\alpha \cdot s_2 \equiv s_2 \pmod{2^k}.$$

故可得 $1 \leq s_2 \leq 2^k - 2$. 于是 $2^k \nmid p^\alpha \cdot s_2$.

(4) 令 $n = 2^k \cdot s$, 其中 $s = p^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, p, p_1, p_2, $\cdots$, p_r 是奇素数, α 为正整数, p^α 是 s 的最大素数方幂. 即,

$$p^\alpha = \max\left\{p^\alpha,\ p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_r^{\alpha_r}\right\}.$$

在这种情况下, 我们证明若 n 有至少三个不同素因子时, 方程 $Z(n) + SL(n) = n$ 无解.

令 $a = 2^{k-1} \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 则 $n = 2a \cdot p^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $(2a,\ p^\alpha) = 1$, p 为素数且 $p \geq 3$.

下面我们分两种情况来讨论:

若 $2^k > p^\alpha$, 则 $SL(n) = 2^k$. 仅当 $Z(n) = n - 2^k$ 时方程有正整数解.

从 $(2a,\ p^\alpha) = 1$ 我们知道同余方程

$$4ax \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

有正整数解, 于是同余方程

$$16a^2x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

有正整数解. 设解为 y, 取 $1 \leq y \leq p^\alpha - 1$, 则 $p^\alpha - y$ 亦为方程的解.

从而可取 $1 \leq y \leq \dfrac{p^\alpha - 1}{2}$. 从 $16a^2y^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ 可知 $p^\alpha \mid (4ay-1)$ 或 $p^\alpha \mid (4ay+1)$.

A. 若 $p^\alpha \mid (4ay-1)$, 则

$$n = 2a \cdot p^\alpha \mid \frac{4ay(4ay-1)}{2}.$$

故可得

$$Z(n) = m \leq 4ay - 1 \leq \frac{4a(p^\alpha - 1)}{2} - 1 = n - 2a - 1.$$

B. 若 $p^\alpha \mid (4ay+1)$, 则

$$n = 2a \cdot p^\alpha \mid \frac{4ay(4ay+1)}{2}.$$

故可得

$$Z(n) = m \leq 4ay \leq \frac{4a(p^\alpha - 1)}{2} = n - 2a.$$

显然 $2^k < a$, 而 $Z(n) = n - 2^k$, $Z(n) > n - a$. 故此时方程无解.

若 $2^k < p^\alpha$, 则 $SL(n) = p^\alpha$. 仅当 $Z(n) = n - p^\alpha = p^\alpha(2a-1)$ 时方程有正整数解.

从 $(2a,\ p^\alpha) = 1$ 可知同余方程

$$p^\alpha x \equiv 1 \pmod{2a}$$

有正整数解, 于是同余方程

$$p^{2\alpha}x^2 \equiv 1 \pmod{2a}$$

有正整数解. 设解为 y, 取 $1 \leq y \leq 2a - 1$, 则 $2a - y$ 也为方程的正整数解. 故可取 $1 \leq y \leq \dfrac{2a-1}{2}$.

由 $p^{2\alpha}x^2 \equiv 1 \pmod{2a}$ 可知 $2a \mid (p^\alpha y - 1)$ 或 $2a \mid (p^\alpha y + 1)$.

C. 若 $2a \mid (p^\alpha y - 1)$, 则

$$n = 2a \cdot p^\alpha \mid \frac{p^\alpha y(p^\alpha y - 1)}{2}.$$

y 为偶数.

故可得

$$Z(n) = m \leq p^\alpha y - 1 \leq p^\alpha \cdot \frac{2a-1}{2} - 1.$$

D. 若 $2a \mid (p^\alpha y + 1)$, 则

$$n = 2a \cdot p^\alpha \mid \frac{p^\alpha y(p^\alpha y + 1)}{2}.$$

y 为偶数.

故可得

$$Z(n) = m \leq p^\alpha y \leq p^\alpha \cdot \frac{2a-1}{2}.$$

于是 $Z(n) = n - p^\alpha$ 不是满足 $Z(n)$ 定义的最小值. 此时方程无正整数解.

这就完成了定理的证明.

6.2 一个包含 Smarandache 函数与伪 Smarandache 函数的方程

上一节研究了两个包含 Smarandache LCM 函数与伪 Smarandache 函数的方程, 这部分我们继续探讨方程的可解性问题. 基于文献 [48] 的基本思想, 我们主要介绍李玲和姚维利的研究成果, 即利用初等和组合的方法研究函数方程

$$Z(n) + S(n) = kn \tag{6-1}$$

的可解性, 其中 k 为任意正整数. 具体说就是证明了下面的定理:

定理 6.4. 当 $k = 1$ 时, $n = 6, 12$ 是方程 (6-1) 仅有的两个特殊正整数解; 而此时其它正整数 n 满足方程 (6-1) 当且仅当 $n = p \cdot u$ 或者 $n = p \cdot 2^\alpha \cdot u$, 其中 $p \geq 7$ 为素数, $2^\alpha \mid p - 1$, u 是 $\dfrac{p-1}{2^\alpha}$ 的任意一个大于 1 的奇数因子.

定理 6.5. 当 $k=2$ 时, $n=1$ 是方程 (6-1) 的一个特殊解; 其它正整数 n 满足方程 (6-1) 当且仅当 $n=p\cdot u$, 其中 $p\geq 5$ 为素数, u 是 $\dfrac{p-1}{2}$ 的任意一个偶数因子.

注意到, $Z(n)\leq 2n-1$ 及 $S(n)\leq n$, 所以当 $k>2$ 时, 方程 (6-1) 没有正整数解. 从定理 6.4 很容易联想到 Fermat 素数, 即形如 $F_n=2^{2n}+1$ 的素数, 其中 $n\geq 1$ 为整数. 例如, $F_1=5, F_2=17, F_3=257$, 等等. 由定理 6.4 不难推出下面的推论:

推论 6.2.1. 当 $k=1$ 时, 如果 n 含有 Fermat 素因子, 则 n 不可能满足方程 (6-1).

定理的证明: 我们利用初等及组合方法来完成定理的证明. 首先证明定理 6.4. 这时 $k=1$. 注意到 $Z(1)+S(1)=2\neq 1$, $Z(2)+S(2)=5\neq 3$, $Z(3)+S(3)=5\neq 3$, $Z(4)+S(4)=11\neq 4$, $Z(5)+S(5)=9\neq 5$, $Z(6)+S(6)=6$, 所以 $n=1,2,\cdots,5$ 不满足方程 (6-1), $n=6$ 满足方程 (6-1), 于是当其它 n 满足方程 (6-1) 时一定有 $n\geq 7$, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式, 此时由 Smarandache 函数的性质知

$$S(n)=\max_{1\leq i\leq k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha})=u\cdot p,$$

其中 p 为某一 p_i, α 为某一 α_i, $u\leq\alpha$.

现在注意到 $p\mid n$ 及 $S(n)=u\cdot p$, 所以可设 $n=p^{\alpha}\cdot n_1$. 当 n 满足方程 (6-1) 时有

$$Z(n)+u\cdot p=p^{\alpha}\cdot n_1. \tag{6-2}$$

首先证明在 (6-2) 式中 $\alpha=1$. 否则假定 $\alpha\geq 2$, 于是由 (6-2) 式立刻推出 $p\mid Z(n)=m$. 由 $Z(n)=m$ 的定义知 $n=p^{\alpha}\cdot n_1$ 整除 $\dfrac{m(m+1)}{2}$, 而 $(m,m+1)=1$, 所以 $p^{\alpha}\mid m$. 从而由 (6-2) 式推出 $p^{\alpha}\mid S(n)=u\cdot p$, 即 $p^{\alpha-1}\mid u$, 从而 $p^{\alpha-1}\leq u$. 但是另一方面, 注意到 $S(n)=S(p^{\alpha})=u\cdot p$, 由 Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质知 $u\leq\alpha$, 所以 $p^{\alpha-1}\leq u\leq\alpha$. 此式对奇素数 p 显然不成立. 如果 $p=2$, 则当 $\alpha\geq 3$ 时, $p^{\alpha-1}\leq u\leq\alpha$ 也不成立. 于是只有一种可能: $u=\alpha=2$. 注意到 $n\geq 5$ 以及 $S(n)=4$, 所以此时只有一种可能: $n=12$, 而 $n=12$ 是方程 (6-1) 的一个解. 所以如果其它正整数 n 满足方程 (6-1), 则 (6-2) 式中必有 $S(n)=p, \alpha=u=1$. 在这种情况下, 令 $Z(n)=m=p\cdot v$, 则 (6-2) 式成为

$$v+1=n_1,$$

或者 $n_1 = v+1$, 即 $n = p\cdot(v+1), Z(n) = p\cdot v$. 再由 $Z(n)$ 的定义知 $n = p\cdot(v+1)$ 整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2} = \frac{pv\cdot(pv+1)}{2},$$

或者 $(v+1)$ 整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2} = \frac{v\cdot(pv+1)}{2}.$$

注意到 $(v+1, v) = 1$, 所以当 v 为偶数时由上式立刻推出 $v+1 \mid pv+p-p+1$, 即 $v+1 \mid p-1$ 或者 $v+1 \mid \frac{p-1}{2}$. 显然对 $\frac{p-1}{2}$ 的任意大于 1 的奇数因子 r, $n = p\cdot r$ 是方程 (6-1) 的解. 因为此时有 $Z(p\cdot r) = p\cdot(r-1)$.

当 v 为奇数时, 由 $(v+1)$ 整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2} = \frac{v\cdot(pv+1)}{2},$$

得到

$$v+1 \mid \frac{(pv+1)}{2} = \frac{(p-1)(v+1)+v-p+2}{2}.$$

由此可推出

$$p-1 = (2k+1)\cdot(v+1).$$

于是设 $p-1 = 2^\beta\cdot h$, 其中 h 为奇数, 则 $\frac{v+1}{2^\beta}$ 为小于 h 的奇数因子. 容易验证对任意奇数 $r \mid h$ 且 $r < h, n = p\cdot 2^\beta\cdot r$ 为方程 (6-1) 的解. 因为此时有

$$Z(p\cdot 2^\beta\cdot r) = p\cdot(2^\beta\cdot r-1).$$

事实上, 注意到 $r \mid h$, 首先容易推出 $p\cdot 2^\beta\cdot r$ 整除

$$\frac{p\cdot(2^\beta\cdot r-1)\cdot(p\cdot(2^\beta\cdot r-1)+1)}{2}.$$

其次当 $m < p\cdot(2^\beta\cdot r-1)$ 时, 不可能有 $p\cdot 2^\beta\cdot r$ 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$. 于是由 $Z(n)$ 的定义知

$$Z(p\cdot 2^\beta\cdot r) = p\cdot(2^\beta\cdot r-1).$$

于是证明了定理 6.4.

现在证明定理 6.5. 此时注意到 $k=2$, 所以当 $n=1$ 时, 有 $Z(1)+S(1)=2$, 即 $n=1$ 是方程 (6-1) 的一个解. 如果方程 (6-1) 还有其它正整数解 $n>2$, 则由定理 6.4 的证明方法不难推出 $n=p\cdot u$, 其中 $p\geq 5$ 为素数, $S(u)<p$. 代入方程 (6-1) 可得

$$Z(p\cdot u)+S(p\cdot u)=2p\cdot u.$$

由此式立刻推出 p 整除 $Z(p\cdot u)$. 设 $Z(p\cdot u)=p\cdot v$, 则 $v=2u-1$. 由 $Z(n)$ 的定义知 $p\cdot u$ 整除 $\dfrac{p(2u-1)(p(2u-1)+1)}{2}$, 从而 u 整除 $\dfrac{p-1}{2}$. 此外, 当 u 为 $\dfrac{p-1}{2}$ 的任一大于 1 的奇数因数时, $Z(p\cdot u)=p\cdot(u-1)$, 所以此时 $n=p\cdot u$ 不是方程 (6-1) 的正整数解; 当 u 为 $\dfrac{p-1}{2}$ 的任一偶数因数时有

$$Z(p\cdot u)=p\cdot(2u-1),$$

此时

$$Z(p\cdot u)+S(p\cdot u)=2p\cdot u.$$

于是完成了定理 6.5 的证明.

由定理 6.4 不难推出文中的推论. 事实上定理 6.4 中的素数不可能是 Fermat 素数, 因为当 p 为 Fermat 素数时, $p-1$ 没有大于 1 的奇数因子.

6.3 关于 Smarandache 函数的两个猜想

文献 [49] 引进了 Smarandache 互反函数 $S_c(n)$:

定义 6.2. $S_c(n)$ 定义为满足 $y\mid n!$ 且 $1\leq y\leq m$ 的最大正整数 m, 即

$$S_c(n)=\max\{m: y\mid n!, 1\leq y\leq m, m+1\nmid n!\}.$$

例如, $S_c(n)$ 的前几个值为: $S_c(1)=1, S_c(2)=2, S_c(3)=3, S_c(4)=4, S_c(5)=6, S_c(6)=6, S_c(7)=10, S_c(8)=10, S_c(9)=10, S_c(10)=10, S_c(11)=12, S_c(12)=12, S_c(13)=16, S_c(14)=16, S_c(15)=16, \cdots$.

文献 [49] 研究了 $S_c(n)$ 的初等性质, 并证明了以下结论: 若 $S_c(n) = x$, 且 $n \neq 3$, 则 $x+1$ 是大于 n 的最小素数.

文献 [50] 引进了伪 Smarandache 对偶函数 $Z^*(n)$:

定义 6.3. $Z^*(n)$ 定义为满足 $\sum\limits_{k=1}^{m} k$ 整除 n 的最大正整数 m, 即

$$Z^*(n) = \max\left\{m:\ \frac{m(m+1)}{2} \mid n\right\}.$$

文献 [51] 研究了 $Z^*(n)$ 的性质, 得到了一些重要的结果. 文献 [52] 中研究了这三个函数之间的关系方程 $Z(n) + Z^*(n) = n$ 与 $S_c(n) = Z^*(n) + n$, 得到了一些重要的结果, 并提出了一些还未解决的猜想:

猜想 1. 方程 $Z(n) + Z^*(n) = n$ 有有限个偶数解, 也许仅有一个偶数解为 $n = 6$.

猜想 2. 方程 $S_c(n) = Z^*(n) + n$ 的解为 p^α, 其中 p 为素数, $2 \nmid \alpha$, $p^\alpha + 2$ 也为素数.

杨长恩研究了以上的问题, 得到了下面的两个定理:

定理 6.6. 当 n 为偶数时, 方程 $Z(n) + Z^*(n) = n$ 的解只有 $n = 6$.

定理 6.7. 方程 $S_c(n) = Z^*(n) + n$ 的解为 p^α, 其中 p 为素数, $2 \nmid \alpha$, $p^\alpha + 2$ 也为素数, 以及满足条件 $a(2a-1) \nmid n$ $(a > 1)$, $n+2$ 为素数, n 为正整数.

在证明定理之前, 我们先给出下面的:

引理 6.3.1. 若 $S_c(n) = x \in Z$, 且 $n \neq 3$, 则 $x+1$ 为大于 n 的最小素数.

证明: 见文献 [49].

由此可见, $S_c(n)$ 除了在 $n = 1, n = 3$ 为奇数外, 在其余情况下的值都是偶数.

引理 6.3.2.

$$Z^*(p^\alpha) = \begin{cases} 2, & p \neq 3, \\ 1, & p = 3. \end{cases}$$

证明: 见文献 [51].

引理 6.3.3. 若 $n \equiv 0 \pmod{a(2a-1)}$, 则有 $Z^*(n) \geq 2a > 1$.

证明: 见文献 [51].

引理 6.3.4.

$$Z^*(n) \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}.$$

证明: 见文献 [51].

引理 6.3.5. 当 $n = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_0 = 2, p_i \geq 3, k \geq 1, \alpha_i \geq 1)$ 为 n 的标准分解式时, 有

$$Z(n) \leq n - \frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}}.$$

证明: 当 $n = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_0 = 2, p_i \geq 3, k \geq 1, \alpha_i \geq 1)$ 为其标准分解式时, 分两种情况来证明:

(i) 设 $n = 2kp^\alpha, \alpha \geq 1, (2k, p^\alpha) = 1, p \geq 3$ 为素数, 由同余方程 $4kx \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ 有解, 可得同余方程 $16k^2x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ 有解, 其解不妨设为 y, 则可取 $1 \leq y \leq p^\alpha - 1$, 又 $p^\alpha - y$ 亦为前面同余方程的解, 则可取 $1 \leq y \leq \dfrac{p^\alpha - 1}{2}$. 由 $16k^2x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, 则 $p^\alpha \mid (4ky-1)(4ky+1)$, 而 $(4ky-1, 4ky+1) = 1$, 于是 $p^\alpha \mid 4ky - 1$ 或 $p^\alpha \mid 4ky + 1$.

若 $p^\alpha \mid 4ky - 1$, 则 $n = 2kp^\alpha \mid \dfrac{4ky(4ky-1)}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} Z(n) &= m \leq 4ky - 1 \leq \frac{4k(p^\alpha - 1)}{2} - 1 \leq n - 2k - 1 \leq (1 - \frac{1}{p^\alpha})n \\ &\leq n - \frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}}. \end{aligned}$$

若 $p^\alpha \mid 4ky + 1$, 则 $n = 2kp^\alpha \mid \dfrac{4ky(4ky+1)}{2}$, 从而也有

$$Z(n) = m \leq 4ky \leq \frac{4k(p^\alpha - 1)}{2} \leq n - 2k = (1 - \frac{1}{p^\alpha})n$$

$$\leq \ n - \frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}}.$$

(ii) 设 $n = 2^{\alpha}(2k+1), (\alpha \geq 1, k \geq 1)$, 则同余方程 $(2k+1)x \equiv 1 \pmod{2^{\alpha+1}}$ 与 $(2k+1)x \equiv -1 \pmod{2^{\alpha+1}}$ 均必有解, 且为奇数, 设 α 为同余方程 $(2k+1)x \equiv 1 \pmod{2^{\alpha+1}}$ 的解, 若 $1 \leq a \leq 2^{\alpha} - 1$, 则取 a 即可, 否则 $2^{\alpha} + 1 \leq a \leq 2^{\alpha+1} - 1$, 则 $2^{\alpha+1} - a \leq 2^{\alpha+1} - 2^{\alpha} - 1 = 2^{\alpha} - 1$, 且 $2^{\alpha+1} - a$ 满足同余方程 $(2k+1)x \equiv -1 \pmod{2^{\alpha+1}}$, 故两个同余方程中必有一个满足 $1 \leq a \leq 2^{\alpha} - 1$ 的解 a, 则 $2^{\alpha+1} \mid (2k+1)a + 1$ 或 $2^{\alpha+1} \mid (2k+1)a - 1$, 若 $2^{\alpha+1} \mid (2k+1)a + 1$, 则

$$2^{\alpha+1}(2k+1) \mid [(2k+1)a+1](2k+1)a,$$

从而

$$\begin{aligned} Z(n) &\leq a(2k+1) \leq (2^{\alpha}-1)(2k+1) \leq (1 - \frac{1}{2^{\alpha}})n \\ &\leq n - \frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}}. \end{aligned}$$

而当 $2^{\alpha+1} \mid (2k+1)a - 1$ 时, 同理也有

$$Z(n) \leq (1 - \frac{1}{2^{\alpha}})n \leq n - \frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}}.$$

综合 (i), (ii), 我们有, 当 $n = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_0 = 2, p_i \geq 3, k \geq 1, \alpha_i \geq 1)$ 为其标准分解式时, 则

$$Z(n) \leq n - \frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}}.$$

下面我们给出定理的证明.

定理 6.6 的证明: 我们分两种情况来证明.

(1) 当 n 至少有三个不同的素因子时, 即 $n = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_0 = 2, k \geq 1, \alpha_i \geq 1)$ 是其标准分解式, 为了书写方便, 令 $p_i^{\alpha_i} = \min\{p_0^{\alpha_0}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}$, 则

$$\frac{n}{p_i^{2\alpha_i}} + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}} = \frac{p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots p_k^{\alpha_k}}{p_i^{\alpha_i}} + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}} > 2.$$

从而, $\dfrac{4n^2}{p_i^{2\alpha_i}}+\dfrac{4n}{p_i^{\alpha_i}}+1>8n+1$, 进而 $\dfrac{n}{p_i^{\alpha_i}}>\dfrac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$, 于是由引理 6.3.4 与引理 6.3.5, 有

$$Z(n)+Z^*(n)\le n-\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}+\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}<n.$$

(2) $n=2^\alpha q^\beta$ ($\alpha\ge 1,\beta\ge 0,q\ge 3$为素数). 分两种情况来证明.

(i) 设 $Z^*(n)=2a$, 则 $a(2a+1)\mid 2^\alpha q^\beta$. 若 a 是大于 1 的奇数, 则 a 与 $2a+1$ 均是 q 的正整数次幂, 与 a 与 $2a+1$ 互素矛盾, 从而 a 为偶数, 则 $a\mid 2^\alpha$, 可设 $a=2^\gamma$ $(0\le\gamma\le\alpha)$, 又 $(2a+1)\mid q^\beta$, 于是 $(2^{\gamma+1}+1)\mid q^\beta$. 若 n 为方程 $Z(n)+Z^*(n)=n$ 的解, 则 $Z(2^\alpha q^\beta)=2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}$, 进而 $2^{\alpha+1}q^\beta\mid(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1})(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+1)$, 则有 $q^\beta\mid 2^{\gamma+1}-1$ 而矛盾. 故此时的 n 不是原方程的解.

(ii) 若 $Z^*(n)=2a-1$, 则 $a(2a-1)\mid 2^\alpha q^\beta$. 由 $(a,2a-1)=1$, 有 $a=2^\gamma$ $(0\le\gamma\le\alpha)$, 且 $(2a-1)\mid q^\beta$, 于是 $(2^{\gamma+1}-1)\mid q^\beta$. 若 n 为方程 $Z(n)+Z^*(n)=n$ 的解, 则 $Z(2^\alpha q^\beta)=2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+1$, 进而 $2^{\alpha+1}q^\beta\mid(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+1)(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+2)$. 因 $(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+1,2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+2)=1$, 则有 $q^\beta\mid 2^{\gamma+1}-1$ 或 $q^\beta\mid 2^{\gamma+1}-2$. 但 $q^\beta\mid 2^{\gamma+1}-2$ 与 $(2^{\gamma+1}-1)\mid q^\beta$ 矛盾, 则 $q^\beta\mid 2^{\gamma+1}-1$. 从而 $q^\beta=2^{\gamma+1}-1=2a-1$, 于是 $Z(2^\alpha q^\beta)=(2^\alpha-1)q^\beta$.

又 $2^{\alpha+1}\mid(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+2)$, 这时又分两种情况.

若 $\gamma=\alpha$, 有 $2^{\alpha+1}\mid(2^\alpha q^\beta+2)$, 则 $2^\alpha\mid 2$, 有 $\alpha=1$, 从而 $a=2,q^\beta=3$, 则 $n=6$. 而 $Z(6)+Z^*(6)=3+3=6$, 即 $n=6$ 为原方程的解.

若 $0\le\gamma\le\alpha-1$, 则 $a=2^\gamma\le 2^{\alpha-1},q^\beta=2a-1\le 2^\alpha-1$, 从而 $Z(2^\alpha q^\beta)\le 2^\alpha(q^\beta-1),Z^*(2^\alpha q^\beta)=q^\beta$, 则

$$Z(2^\alpha q^\beta)+Z^*(2^\alpha q^\beta)\le 2^\alpha(q^\beta-1)+q^\beta\le 2^\alpha(q^\beta-1)+2^\alpha-1=n-1,$$

故此时的 n 不是原方程得解.

定理 6.7 的证明: 我们分五种情况来证明.

(1) $n=1$ 时, $Z^*(1)=1,S_c(1)=1$, 则 1 不为其解.

(2) $n=3^\alpha$ $(\alpha\ge 1)$, 由引理 6.3.2, $Z^*(3^\alpha)=2$, 若 $n=3^\alpha$ 是原方程的解, 则 $S_c(3^\alpha)=2+3^\alpha$, 因为 $3\mid 3^\alpha+2+1$, 从而 $3^\alpha+2+1$ 不可能为素数而与引理 6.3.1 相矛盾, 故 $n=3^\alpha$ 不是原方程的解.

(3) $n=p^\alpha$ ($\alpha\ge 1,p\ge 5$为素数), 由引理 6.3.2, $Z^*(p^\alpha)=1$, 若 $n=p^\alpha$ 是原方程的解, 则 $S_c(p^\alpha)=1+p^\alpha$, 因当 $p\ge 5$ 时, $3\mid p^{2\beta}+2$, 故由引

理 6.3.1, α 不能为偶数, 且当 $p^\alpha+2$ $(2\nmid\alpha)$ 为素数时, $n=p^\alpha$ $(\alpha\geq 1, p\geq 5$为素数) 满足原方程.

(4) $n=2^\alpha$ $(\alpha\geq 1)$, 若 $\dfrac{m(m+1)}{2}\mid 2^\alpha$, 因 $(m,m+1)=1$, 则 $m=1$, 故 $Z^*(2^\alpha)=1$, 若 $n=2^\alpha$ 是原方程的解, 则 $S_c(2^\alpha)=1+2^\alpha$, 因 $2\mid(2^\alpha+1+1)$, 与引理 6.3.1 矛盾, 故 $n=2^\alpha$ $(\alpha\geq 1)$ 不是原方程的解.

(5) $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $(k\geq 2,\alpha_i\geq 1)$ 为其标准分解式. 我们又分两种情况来证明.

(i) $2\nmid n$, 则 $2\nmid p_i^{\alpha_i}$ 时, 从而 $2\mid S_c(n)$, 若 n 要满足原方程, 则必须 $2\nmid Z^*(n)$. 现考虑 $Z^*(n)$, 若存在整数 a $(a>1)$, 使 $a(2a-1)\mid n$, 则 $Z^*(n)\geq 2a-1$, 若存在整数 a $(a>1)$, 使 $a(2a+1)\mid n$, 则 $Z^*(n)\geq 2a$, 从而

$$Z^*(n)=\max\left\{\max\left\{2k:\ k(2k+1)\mid n\right\},\ \max\left\{2k-1:\ k(2k-1)\mid n\right\}\right\}.$$

再分三种情况来讨论:

第一, 若 $Z^*(n)=2a-1>1$, 则 $a(2a-1)\mid n$, 有 $a\mid n$, $a\mid[n+(2a-1)+1]$. 若 n 要满足原方程, 则 $S_c(n)=2a-1+n$. 而 $S_c(n)+1$ 不为素数, 与引理 6.3.1 相矛盾.

第二, 若 $Z^*(n)=2a>1$, 则 $a(2a+1)\mid n$, 有 $a\mid n$, $(2a+1)\mid n$. 若 n 要满足原方程, 则 $S_c(n)=2a+n$. 而 $S_c(n)+1$ 不为素数, 与引理 6.3.1 矛盾.

最后, 若 $Z^*(n)=1$, 由 $a>1$, 则 $a(2a-1)\nmid n$, 从而若 $n+2$ 不是素数, 由引理 6.3.1, 这样的 n 不是原方程的解. 若 $n+2$ 为素数, 由引理 6.3.1, 这样的 n 为原方程的解. 即 $a(2a-1)\nmid n$, $n+2$ 为素数时的正整数 n 为原方程的解.

(ii) $2\mid n$, 若 n 满足原方程, 则必须 $Z^*(n)$ 为偶数, 且 $Z^*(n)\geq 2$, 而 $Z^*(n)=m\geq 2$, $\dfrac{m(m+1)}{2}\mid n$, 则 $(m+1)\mid n$, 进而 $(m+1)\mid(n+m+1)$, 这样 $S_c(n)=n+m+1$ 不是素数, 与引理 6.3.1 矛盾.

这就完成了定理的证明.

6.4 一个包含函数 $\overline{S_k}(n)$ 的方程

本节我们继续介绍包含 Smarandache 函数的方程可解性问题.

定义 6.4. 对于给定的正整数 n, k 且 $k \geq 2$, 著名的 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为最小的正整数 x 使得 $n|x^k$, 即

$$S_k(n) = \min\{x:\ x \in \mathbf{N}, n|x^k\}.$$

定义 6.5. $S_k(n)$ 的对偶函数 $\overline{S_k}(n)$ 定义为最大的正整数 x 使得 $x^k|n$, 即

$$\overline{S_k}(n) = \max\{x:\ x \in \mathbf{N}, x^k|n\}.$$

例如, 当 $k=2$ 时, $S_2(n)$ 的前几个值是 $S_2(1)=1$, $S_2(2)=2$, $S_2(3)=3$, $S_2(4)=2$, $S_2(5)=5$, $S_2(6)=6$, $S_2(7)=7$, $S_2(8)=4$, $S_2(9)=3$, $\cdots$. 而 $\overline{S_2}(n)$ 的前几个值是 $\overline{S_2}(1)=1$, $\overline{S_2}(2)=1$, $\overline{S_2}(3)=1$, $\overline{S_2}(4)=2$, $\overline{S_2}(5)=1$, $\overline{S_2}(6)=1$, $\overline{S_2}(7)=1$, $\overline{S_2}(8)=2$, $\overline{S_2}(9)=3$, $\cdots$.

关于 $S_k(n)$ 和 $\overline{S_k}(n)$ 的一些初等性质, 许多学者也进行了讨论, 并给出了一些有趣的结论, 有关这些内容参考文献 [53-55]. 例如, 在文献 [53] 中, 王永兴证明了对于满足 $(a,\ b)=1$ 的两个正整数 a, b, 有

$$\overline{S_k}(ab) = \max\{m:\ m \in N,\ m^k|a\}\cdot\max\{m:\ m \in N,\ m^k|b\} = \overline{S_k}(a)\cdot\overline{S_k}(b),$$

和

$$\overline{S_k}\,(p^\alpha) = p^{\lfloor \frac{\alpha}{k} \rfloor}.$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 定义为小于等于 x 的最大正整数. 对于任意正整数 n, 如果 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 于是得到了

$$\overline{S_k}(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}) = p_1^{\lfloor \frac{\alpha_1}{k} \rfloor}p_2^{\lfloor \frac{\alpha_2}{k} \rfloor}\cdots p_r^{\lfloor \frac{\alpha_r}{k} \rfloor} = \overline{S_k}(p_1^{\alpha_1})\overline{S_k}(p_2^{\alpha_2})\cdots\overline{S_k}(p_r^{\alpha_r}).$$

从这些性质我们可以得知 $\overline{S_k}(n)$ 是一个可乘函数, 同时我们引进两个函数 $\omega(n)$ 和 $\Omega(n)$, 若 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 我们定义 $\omega(n)$ 为 n 的所有不同素因子的个数, 不包括素因子的重数, 即 $\omega(n) = \omega(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}) = r$. $\Omega(n)$ 定义为 n 的所有素因子的个数和, 即 $\Omega(n) = \Omega(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$.

在一篇已被西南大学学报录用的李晓妍的论文中, 她研究了函数方程

$$\sum_{d|n}\overline{S_k}(d) = \omega(n)\Omega(n). \tag{6-3}$$

的可解性, 并给出了该方程的所有正整数解. 具体地说就是证明了下面的定理:

定理 6.8. 方程 (6-3) 有无穷多个正整数解, 并且每个解属于下例情况之一:

1). $n = p_1^{\alpha} p_2$ 或者 $p_1 p_2^{\beta}$, 其中 $1 \leq \alpha, \beta \leq k-1$;

2). $n = p_1^2 p_2 p_3$ 或者 $n = p_1 p_2^2 p_3$ 或者 $n = p_1 p_2 p_3^2$;

3). $n = p_1 p_2 p_3 p_4$. 其中 $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ 为奇素数.

证明: 下面我们利用初等及组合的方法来完成定理的证明. 首先因为 $\overline{S_k}(n)$ 是一个可乘函数, 所以由可乘函数的性质知 $\sum\limits_{d|n} \overline{S_k}(d)$ 也是可乘函数, 现在可以分如下几种情况情况来证明我们的结论.

(i). 当 $n = 1$ 时, 对所有的 $k \geq 2$, $\sum\limits_{d|n} \overline{S_k}(d) = \overline{S_k}(1) = 1$, $\omega(n)\Omega(n) = 0$, 等式 (6-3) 不成立, 因此 $n = 1$ 并不是方程 (6-3) 的解.

(ii). 当 $n = p^{\alpha}$ 时, 其中 $1 \leq \alpha \leq k-1$, p 是素数. 由函数 $\overline{S_k}(n)$ 的定义我们有

$$\sum_{d|p^{\alpha}} \overline{S_k}(d) = \overline{S_k}(1) + \overline{S_k}(p) + \cdots + \overline{S_k}(p^{\alpha}) = \alpha + 1.$$

而此时 $\omega(n) = 1$, $\Omega(n) = \alpha$, 故 $\omega(n)\Omega(n) = \alpha$, $\sum\limits_{d|n} \overline{S_k}(d) \neq \omega(n)\Omega(n)$, 因此 $n = p^{\alpha}$ 也不是方程 (6-3) 的解.

(iii). 当 $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 时, 其中 $1 \leq \alpha_i \leq k-1$, $i = 1, 2, \cdots, r$, $r \geq 2$, 由于 $\sum\limits_{d|n} \overline{S_k}(d)$ 是一个可乘函数, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{d|p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}} \overline{S_k}(d) &= \sum_{d|p_1^{\alpha_1}} \overline{S_k}(d) \cdot \sum_{d|p_2^{\alpha_2}} \overline{S_k}(d) \cdots \sum_{d|p_r^{\alpha_r}} \overline{S_k}(d) \\ &= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1). \end{aligned}$$

同时, $\omega(n) = r$, $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$, $\omega(n)\Omega(n) = r(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)$, 此时方程 (6-3) 为:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1) = r(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r). \tag{6-4}$$

下面我们从如下几种情况对所有的正整数 r $(r \geq 2)$ 进行讨论:

(a). 若 $r = 2$, $\sum\limits_{d|n} \overline{S_k}(d) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$, $\omega(n)\Omega(n) = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$, 我们解方程 $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ 得 $\alpha_1 = 1$ 或者 $\alpha_2 = 1$. 所以 $n = p_1^{\alpha} p_2$ 和 $n = p_1 p_2^{\beta}$ 满足 (6-3), 其中 $1 \leq \alpha, \beta \leq k - 1$.

(b). 若 $r = 3$, 满足方程 (6-4) 的等式为:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3). \tag{6-5}$$

下面我们对 α_i 的取值进行讨论, 其中 $i = 1, 2, 3$.

i). 若 (6-5) 式中有且仅有一个 α_i 满足 $\alpha_i = 1$, 我们不妨令 $\alpha_1 = 1$, α_2, $\alpha_3 > 1$, 此时有

$$2(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 3(1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

由于

$$\begin{aligned}
& 2(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) - 3(1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\
= \; & 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_3 - 1 \\
= \; & \alpha_2(\alpha_3 - 1) + \alpha_3(\alpha_2 - 1) - 1 > 0.
\end{aligned}$$

这就证明了 $2(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)$ 总是大于 $3(1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, 因此方程 (6-3) 在此种情况下无解.

ii). 若 (6-5) 式中有两个 α_i 满足 $\alpha_i = 1$, 我们可以设 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 > 1$, 解方程 $4(\alpha_3 + 1) = 3(2 + \alpha_3)$, 得到 $\alpha_3 = 2$, 于是 $n = p_1^2 p_2 p_3$ 或者 $n = p_1 p_2^2 p_3$ 或者 $n = p_1 p_2 p_3^2$ 满足方程 (6-3), 是它的解.

iii). 若所有的 α_i 都满足 $\alpha_i = 1$, 方程 (6-5) 不成立, 此时方程 (6-3) 无解.

iv). 若所有的 α_i 满足 $\alpha_i > 1$, 我们可以很容易的证明下面的不等式成立:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) > 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

即

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + 1 > 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3.$$

因为

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + 1) - (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1(\alpha_2-2)+\alpha_2(\alpha_3-2)+\alpha_3(\alpha_1-2)+1\\
&\geq \alpha_1\alpha_2\alpha_3+1>0.
\end{aligned}
$$

这就证明了 (6-5) 式的左边总是大于右边, 因此方程 (6-3) 在这种情况下也是无解的.

(c). 当 $k=4$, 我们有

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4). \qquad (6\text{-}6)$$

下面我们对方程 (6-6) 中 α_i 的取值进行讨论, 其中 $i=1,2,3,4$.

i). 当方程 (6-6) 中有且只有一个 α_i 满足 $\alpha_i=1$, 我们可以设 $\alpha_1=1,\ \alpha_2>1,\ \alpha_3>1,\ \alpha_4>1$, 这样 (6-6) 式变为

$$2(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=4(1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),$$

即

$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4.$$

因为 $\alpha_2>1,\ \alpha_3>1,\ \alpha_4>1$, 这样我们可以很容易的证明 (6-6) 式的左边总是大于右边, 此时方程无解.

ii). 当方程 (6-6) 中有两个 α_i 满足 $\alpha_i=1$, 不妨令 $\alpha_1=\alpha_2=1,\ \alpha_3>1,\ \alpha_4>1$, 我们有

$$(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=2+\alpha_3+\alpha_4.$$

显然这个等式不成立, 因此在这种情况下方程无解.

iii). 当方程 (6-6) 中有三个 α_i 满足 $\alpha_i=1$, 可令 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1,\ \alpha_4>1$, (6-6) 式变为

$$2(\alpha_4+1)=3+4\alpha_4.$$

并得到 $\alpha_4=1/2$, 这是不可能的, 故此时方程 (6-3) 无解.

iv). 当方程 (6-6) 中所有 α_i 满足 $\alpha_i=1$, 此时 (6-6) 式成立, 因此 $n=p_1p_2p_3p_4$ 是方程 (6-3) 的解.

v). 若所有四个 α_i 均满足 $\alpha_i>1$, 由于当 $\alpha_1>1,\ \alpha_2>1$ 时, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)>2(\alpha_1+\alpha_2)$. 同理可知当 $\alpha_3>1,\ \alpha_4>1$ 时, $(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)>2(\alpha_3+\alpha_4)$.

于是我们有

$$
\begin{aligned}
& (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1) \\
> \; & 4(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4) \\
= \; & 4(\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4) \\
> \; & 4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4).
\end{aligned}
$$

因此等式 (6-6) 左边总是大于右边, 所以方程 (6-3) 在此种情况下无解.

(d). 当 $r > 4$, 且 $1 \le i \le r$, 可以证明方程 (6-3) 的左边总是大于右边. 即

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_r+1) > r(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r).$$

所以方程 (6-3) 在这种情况下无解.

下面我们用数学归纳法证明上述不等式成立. 设 $r = i$ 时, 不等式成立, 即

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_i+1) > i(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i).$$

则当 $k = i+1$ 时,

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_i+1)(\alpha_{i+1}+1) > i(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1).$$

又因为

$$
\begin{aligned}
& i(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1)-(i+1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i+\alpha_{i+1}) \\
= \; & i(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1)-i(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i)-i\alpha_{i+1} \\
& -(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i)-\alpha_{i+1} \\
= \; & (i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i)-(i+1)\alpha_{i+1} \\
> \; & (i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i)-(i+1)(i\alpha_{i+1}-1) \\
> \; & (i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i-i-1) \\
> \; & 0.
\end{aligned}
$$

所以, 当 $k = i+1$ 时, 不等式亦成立, 从而在这种情况下方程 (6-3) 无解.

(iv). 当 $n = p^{\alpha}$ 和 $\alpha \ge k$, 此时我们定义 $\alpha = k\beta+\gamma$ 使得 $n = p^{k\beta+\gamma}$, 其中 $\beta \ge 1,\ 0 \le \gamma < k$, 我们有

$$\sum_{d \mid p^{k\beta+\gamma}} \overline{S_k}(d)$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{S_k}(1)+\overline{S_k}(p)+\cdots+\overline{S_k}(p^{k-1})+\overline{S_k}(p^k)+\cdots+\\
&\quad \overline{S_k}(p^{2k-1})+\overline{S_k}(p^{2k})+\cdots+\overline{S_k}(p^{k(\beta-1)-1})+\overline{S_k}(p^{k(\beta-1)})\\
&\quad +\cdots+\overline{S_k}(p^{k\beta-1})+\overline{S_k}(p^{k\beta})+\overline{S_k}(p^{k\beta+1})+\cdots+\overline{S_k}(p^{k\beta+\gamma})\\
&= \underbrace{1+\cdots+1}_{k}+\underbrace{p+\cdots+p}_{k}+\underbrace{p^2+\cdots+p^2}_{k}+\\
&\quad \cdots+\underbrace{p^{\beta-1}+\cdots+p^{\beta-1}}_{k}+\underbrace{p^{\beta}+\cdots+p^{\beta}}_{\gamma+1}\\
&= k(1+p+p^2+\cdots+p^{\beta-1})+(\gamma+1)p^{\beta}\\
&= \frac{k(p^{\beta}-1)}{p-1}+(\gamma+1)p^{\beta}.
\end{aligned}
$$

同时, $\omega(n)\Omega(n)=k\beta+\gamma$, 故方程 (6-3) 可以变为:

$$\frac{k(p^{\beta}-1)}{p-1}+(\gamma+1)p^{\beta}=k\beta+\gamma.$$

因为 $(\gamma+1)p^{\beta}>\gamma$, 以及

$$
\begin{aligned}
k(p^{\beta}-1)-(p-1)k\beta &= kp^{\beta}-k-kp\beta+k\beta\\
&= k(p^{\beta}-p\beta)+k(\beta-1)\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

于是我们得到 $\dfrac{k(p^{\beta}-1)}{p-1}+(\gamma+1)p^{\beta}>k\beta+\gamma$, 此时方程无解.

(v). 若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 和 $\alpha_i\geq k$, $i=1, 2, \cdots, r$, 我们令 $\alpha_i=k\beta_i+\gamma_i$, $\beta_i\geq 1$, $0\leq\gamma_i<k$ 使得 $n=p_1^{k\beta_1+\gamma_1}p_2^{k\beta_2+\gamma_2}\cdots p_r^{k\beta_r+\gamma_r}$, 因为 $\overline{S_k}(n)$ 是一个可乘函数, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{d|p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}}\overline{S_k}(d)\\
&= \sum_{d|p_1^{k\beta_1+\gamma_1}p_2^{k\beta_2+\gamma_2}\cdots p_r^{k\beta_r+\gamma_r}}\overline{S_k}(d)\\
&= \sum_{d|p^{k\beta_1+\gamma_1}}\overline{S_k}(d)\cdot\sum_{d|p^{k\beta_2+\gamma_2}}\overline{S_k}(d)\cdots\sum_{d|p^{k\beta_r+\gamma_r}}\overline{S_k}(d)\\
&= \left(\frac{k(p^{\beta_1}-1)}{p-1}+(\gamma_1+1)p^{\beta_1}\right)\cdot\left(\frac{k(p^{\beta_2}-1)}{p-1}+(\gamma_2+1)p^{\beta_2}\right)\\
&\quad \cdot\cdots\cdot\left(\frac{k(p^{\beta_r}-1)}{p-1}+(\gamma_r+1)p^{\beta_r}\right).
\end{aligned}
$$

同时, $\omega(n)\Omega(n) = r\left[k(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r)+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r\right]$.

因此方程可变为

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{k(p^{\beta_1}-1)}{p-1}+(\gamma_1+1)p^{\beta_1}\right)\cdot\left(\tfrac{k(p^{\beta_2}-1)}{p-1}+(\gamma_2+1)p^{\beta_2}\right)\cdot\cdots\\ &\qquad\cdot\left(\tfrac{k(p^{\beta_r}-1)}{p-1}+(\gamma_r+1)p^{\beta_r}\right)\\ &= r\left[k(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r)+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r\right].\end{aligned} \tag{6-7}$$

可以证明 (6-7) 式左边总是大于右边.

我们利用数学归纳法进行证明:

设 $r=i$, 不等式成立, 即

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{k(p^{\beta_1}-1)}{p-1}+(\gamma_1+1)p^{\beta_1}\right)\cdot\left(\tfrac{k(p^{\beta_2}-1)}{p-1}+(\gamma_2+1)p^{\beta_2}\right)\cdot\cdots\\ &\qquad\cdot\left(\tfrac{k(p^{\beta_i}-1)}{p-1}+(\gamma_i+1)p^{\beta_i}\right)\\ &> i\left[k(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_i)+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_i\right].\end{aligned}$$

则当 $r=i+1$ 时,

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{k(p^{\beta_1}-1)}{p-1}+(\gamma_1+1)p^{\beta_1}\right)\cdot\left(\tfrac{k(p^{\beta_2}-1)}{p-1}+(\gamma_2+1)p^{\beta_2}\right)\cdot\cdots\\ &\cdot\left(\tfrac{k(p^{\beta_i}-1)}{p-1}+(\gamma_i+1)p^{\beta_i}\right)\cdot\left(\tfrac{k(p^{\beta_{i+1}}-1)}{p-1}+(\gamma_{i+1}+1)p^{\beta_{i+1}}\right)\\ &> i\left[k(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_i)+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_i\right]\left(\tfrac{k(p^{\beta_{i+1}}-1)}{p-1}+(\gamma_{i+1}+1)p^{\beta_{i+1}}\right)\\ &> (i+1)\left[k(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{i+1})+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_{i+1}\right].\end{aligned}$$

所以 $k=i+1$ 时, 不等式成立.

(vi). 若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}p_{r+2}^{\alpha_{r+2}}\cdots p_{r+t}^{\alpha_{r+t}}$, 其中 $\alpha_i>k$ $(i=1,2,\cdots,r)$, $1\le\alpha_j<k$ $(r+1\le j\le r+t)$, 从以上的讨论可知, 此种情况下方程 (6-3) 无解.

综合以上讨论, 我们完成了定理的证明.

6.5 关于 Smarandache 问题的一个推广

不定方程 (或方程组) 是变量数个数多于方程个数, 且变量取整数值的方程 (或方程组). 不定方程是数论中古老而又重要的一个分支, 例如著名的 Fermat 大定理就是不定方程的一个典型代表, 其内容与现代数

学有密切的联系. F. Smarandache 教授在文献 [1] 第 50 个问题中建议我们研究方程

$$xa^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}a^{x} = 2a \tag{6-8}$$

的可解性, 并求该方程的所有实数解.

关于这一问题, 张文鹏教授在文献 [56] 中进行了研究. 具体地说, 即证明下面的结论:

定理. 对所有的 $a \in \mathbf{R}\backslash\{-1,0,1\}$, 方程 (6-8) 有且仅有一个实数解 $x=1$.

本节将方程 (6-8) 进行了推广和延伸, 即考虑了 $n-1$ 个变量的情况, 求出了方程

$$x_1a^{\frac{1}{x_1}} + x_2a^{\frac{1}{x_2}} + \cdots + x_{n-1}a^{\frac{1}{x_{n-1}}} + \frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}a^{x_1x_2\cdots x_{n-1}} = na \tag{6-9}$$

的所有非负实数解, 亦即证明了下面的定理.

定理 6.9.[59] 对任意实数 $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, 方程 (6-9) 有且仅有一组非负实数解

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1.$$

当 $n=2$ 时, 方程 (6-9) 变为 $x_1a^{\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{x_1}a^{x_1} = 2a$, 即文献 [56] 中所讨论的情况. 因此本文的结果是文献 [56] 中定理的推广和延伸.

证明: 利用文献 [56] 中的思想直接给出定理证明. 为此需要下面的两个结论:

结论 1. 对任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 有不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

多元函数取得极值的必要条件: 设函数 $z = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 具有偏导数且取得极值, 则它在该点的偏导数必为零, 即

结论 2. $f_{x_1}(x_1',x_2',\cdots,x_n') = f_{x_2}(x_1',x_2',\cdots,x_n') = \cdots = f_{x_n}(x_1',x_2',\cdots,x_n') = 0.$

以上两个结论的证明可参阅文献 [9]、[57] 及 [58].

现在利用以上两个结论来证明对所有 $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, 方程

$$x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \cdots + x_{n-1} a^{\frac{1}{x_{n-1}}} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = na$$

成立, 当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$. 现在将 a 分成三种情况 $a \geq 1, 0 < a < 1$ 及 $a < 0$ 讨论.

事实上, 当 $a \geq 1$ 时, 由上面的基本不等式可得

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \geq a.$$

于是有

$$\begin{aligned} & x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \cdots + x_{n-1} a^{\frac{1}{x_{n-1}}} + \tfrac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \\ & \geq n \sqrt[n]{a^{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}} \geq n \sqrt[n]{a^n} \geq na, \end{aligned}$$

上式成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \dfrac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$ 或者 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$. 既当 $a \geq 1$ 时, 方程 (6-9) 仅有一组正实数解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时, 为方便起见, 设 $x_n = \dfrac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$, 并令函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) &= x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \cdots + x_{n-1} a^{\frac{1}{x_{n-1}}} \\ &\quad + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} - na, \end{aligned}$$

因为函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 在 $(0, +\infty)$ 上是可导的, 故对 $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 分别关于 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 求偏导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= a^{\frac{1}{x_1}}(1 - \frac{\ln a}{x_1}) + \frac{1}{x_1} \ln a a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} - \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \\ &= a^{\frac{1}{x_1}}(1 - \frac{\ln a}{x_1}) + \frac{1}{x_1} a^{\frac{1}{x_n}} (\ln a - x_n), \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= a^{\frac{1}{x_2}}(1 - \frac{\ln a}{x_2}) + \frac{1}{x_2} a^{\frac{1}{x_n}} (\ln a - x_n), \end{aligned}$$

$\cdots$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = a^{\frac{1}{x_{n-1}}}(1-\frac{\ln a}{x_{n-1}})+\frac{1}{x_{n-1}}a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a - x_n).$$

分别令 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0$, 则

$$a^{\frac{1}{x_1}}(\ln a - x_1) = a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a - x_n),$$

$$a^{\frac{1}{x_2}}(\ln a - x_2) = a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a - x_n),$$

$$\cdots$$

$$a^{\frac{1}{x_{n-1}}}(\ln a - x_{n-1}) = a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a - x_n).$$

设函数 $u(x) = a^{\frac{1}{x}}(\ln a - x)$, 其中 $0 < a < 1$. 下面证明此函数为单调函数.

$$\begin{aligned} u'(x) &= a^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x^2}\ln a(x-\ln a)-1] \\ &= -a^{\frac{1}{x}}[(\frac{\ln a}{x})^2 - \frac{\ln a}{x}+1] \\ &= -a^{\frac{1}{x}}[(\frac{\ln a}{x}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}] < 0. \end{aligned}$$

故 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数, 所以对应于同一个函数值 $u(x_0)$, 有且仅有一个 x_0 成立. 所以由

$$a^{\frac{1}{x_1}}(\ln a - x_1) = a^{\frac{1}{x_2}}(\ln a - x_2) = \cdots = a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a - x_n)$$

可得出 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = q$. 则 $(q, q, \cdots, q)$ 为原函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 可能的极值点, 且仅有这一个极值点. 由 $q^n = 1$ 可得 $q = 1$, 故 $(1, 1, \cdots, 1)$ 为函数的极值点, 此时极值为 0. 事实上, 假设函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$, 还有其他的极值点, 设为 $(x_1', x_2', \cdots, x_{n-1}')$, 则由多元函数极值存在的必要条件可知, 在这一点必有 $x_1' = x_2' = \cdots = x_{n-1}' = 1$ 式成立, 与之前单调函数同一函数值对应唯一自变量矛盾. 故函数只有点 $(1, 1, \cdots, 1)$ 这一个极值点. 即此时原函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) &= x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \cdots + x_{n-1} a^{\frac{1}{x_{n-1}}} \\ &\quad + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} - na, \end{aligned}$$

取得唯一极值, 且极值为 0. 既当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ 时, 原方程的解是

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1.$$

当 $a < 0$ 时, 原方程 (6-9) 若要有解, 则 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 必为有理数, 因为负数不能开无理数次方, 故设 $x_i = \frac{p_i}{q_i}$, $(p_i, q_i) = 1$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 若要 $a^{\frac{q_i}{p_i}}$ 有意义, 则 p_i 必为奇数, 故 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 也为奇数, 若存在 q_i 为偶数, 则由已知条件有 $\frac{q_1 \cdots q_i \cdots q_n}{p_1 \cdots p_i \cdots p_n} = 1$, 这与 p_i 为奇数矛盾. 所以 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 也为奇数, q_i 为奇数, 所以有 $a^{\frac{1}{x_i}} = -|a|^{\frac{1}{x_i}}$, 于是原方程可化为

$$\begin{aligned} n|a| &= -na = -x_1 a^{\frac{1}{x_1}} - \cdots - x_{n-1} a^{\frac{1}{x_{n-1}}} - \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \\ &= x_1 |a|^{\frac{1}{x_1}} + \cdots + x_{n-1} |a|^{\frac{1}{x_{n-1}}} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} |a|^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}. \end{aligned}$$

此时, 由前面讨论的两种情况可知, 方程 (6-9) 的解仍然是

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1.$$

综上所述, 可得出方程 (6-9) 的所有非负实数解为

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1.$$

于是, 完成了定理的证明.

第七章 Smarandache 函数相关问题

7.1 Smarandache 函数的混合均值问题

在前面已经介绍过 Smarandache 函数 $S(n)$ 及因子积数列 $\{P_d(n)\}$ 的定义, 即

$$S(n) = \min\{m :\ m \in N,\ n \mid m\}$$

$$P_d(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}.$$

关于这两个函数的的各种性质, 已有许多人进行研究. 本书作者在前人的研究成果上构造并完全解决了一个新的混合均值问题 (见文献 [60]), 具体说就是利用初等及解析方法研究了混合均值

$$\sum_{n\le x}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2$$

的渐近性质，并给出了一个较强的渐近公式.

定理 7.1. 设 $N \geq 1$ 为给定的正整数. 对于任意实数 $x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2=\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{N+1}x}\right),$$

其中 c_i $(i = 1,\ 2,\ \cdots, N)$ 是可计算的常数且 $c_1 = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\zeta^4\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}$, $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta- 函数.

为了证明这个结论, 先给出几个引理.

引理 7.1.1. 设 $n \geq 1$ 为正整数, 则

(i) 如果 n 有一个素因子 $p > \sqrt{n}$，则 $S\left(P_d\left(n\right)\right) = \frac{d(n)}{2}\cdot p$;

(ii) 如果 $n = n_1p_1p_2$ 且 $n^{\frac{1}{3}} < p_1 < p_2 \leqslant \sqrt{n}$，则 $S\left(P_d\left(n\right)\right) = \frac{d(n)}{2}\cdot p_2$;

(iii) 如果 $n = n_1p^2$ 且 $p > n_1$, 则有 $S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right) = \frac{3}{2}pd\left(n_1\right)$.

证明: 对任意正整数 n, 设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式. 于是由 Smarandache 函数的性质可得 $S(n) = \max\{S(p_1^{\alpha_1}), S(p_2^{\alpha_2}), \cdots, S(p_k^{\alpha_k})\}$. 于是

(i). 当 n 有一个素因子 $p > \sqrt{n}$ 时, 注意到此时 $p \geq \frac{1}{2}d(n)$, 由 Smarandache 函数的性质及已知条件有

$$S(P_d(n)) = S\left(n^{\frac{d(n)}{2}}\right) = S\left(p^{\frac{d(n)}{2}}\right) = \frac{d(n)}{2}\cdot p.$$

(ii). 当 $n = n_1p_1p_2$ 且 $n^{\frac{1}{3}} < p_1 < p_2 \leqslant \sqrt{n}$ 时, 由 Smarandache 函数的性质可得 $S(m_1p_1p_2) = p_2$, 所以

$$S(P_d(n)) = S\left(m_1^{\frac{d(n)}{2}}p_1^{\frac{d(n)}{2}}p_2^{\frac{d(n)}{2}}\right) = S\left(p_2^{\frac{d(n)}{2}}\right) = \frac{d(n)}{2}\cdot p_2.$$

(iii). 当 $n = n_1p^2$ 且 $p > n_1$ 时, 此时显然有 $n^{\frac{1}{3}} < p \leqslant \sqrt{n}$. 于是由 Smarandache 函数的性质并注意 $d(n) = 3d(n_1)$ 我们有:

$$S(P_d(n)) - \frac{1}{2}d(n)P(n) = 2p\cdot\frac{d(n)}{2} - \frac{1}{2}pd(n) = \frac{1}{2}pd\left(n_1p^2\right) = \frac{3}{2}p\cdot d(n_1).$$

于是证明了引理 7.1.1.

引理 7.1.2. 令 p 为素数, m 为正整数, 且 $m \leqslant x^{\frac{1}{3}}$, 则有渐近公式

$$\sum_{m\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}} p^2 = \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i\cdot\ln^{i-1}m}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^{N+1}x}\right) + O\left(\frac{m^3}{\ln m}\right),$$

其中 c_i 为可计算的常数且 $c_1 = 1$.

证明: 显然由素数定理我们有平凡估计式:

$$\sum_{p\leqslant m} p^2 = m^2\pi(m) - \int_2^m 2y\pi(y)dy = O\left(\frac{m^3}{\ln m}\right).$$

于是由文献 [3] 以及 Abel 求和公式我们立刻推出:

$$\sum_{m\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}} p^2 = \sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}} p^2 + O\left(\frac{m^3}{\ln m}\right) = \frac{x}{m}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right) - \int_2^{\sqrt{\frac{x}{m}}} 2y\pi(y)dy$$

$$= \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i\cdot\ln^{i-1}m}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^{N+1}x}\right)+O\left(\frac{m^3}{\ln m}\right),$$

其中 c_i 为可计算的常数且 $c_1=1$. 于是完成了引理 7.1.2 的证明.

引理 7.1.3. 对任意实数 $x\geqslant 3$, 设 A 表示所有这样整数 n 的集合：对任意素数 p, $p|n$ 当且仅当 $p\leq n^{\frac{1}{3}}$. 则有如下估计式:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x.$$

证明: 注意到对任意正整数 $n\in A$，显然由 Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质知当 $p|n$ 时, 如果 $S(n)=p$, 则 $S\left(P_d(n)\right)=\frac{1}{2}d(n)P(n)=\frac{1}{2}d(n)\cdot p$, 此时有

$$\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2=0.$$

如果 $S\left(P_d(n)\right)\neq\frac{1}{2}d(n)P(n)$, 设 $S(n)=S(p^\alpha)$. 则显然有 $\alpha\geq 2$. 注意到估计式:

$$\sum_{n\leq M}d^2(n)\ll M\cdot\ln^3 M.$$

于是由素数定理 (参阅文献 [8] 及 [27]) 我们有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2\ll\sum_{\substack{np^2\leq x\\ p\leq n}}p^2d^2(n)$$

$$\ll\sum_{p\leq x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{p<n\leq\frac{x}{p^2}}d^2(n)\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x.$$

从而证明了引理 7.1.3.

定理的证明: 根据引理 7.1.1 的 (i) 式知对任意正整数 n, 如果存在素数 $p|n$ 且 $p>\sqrt{n}$, 则 $S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{d\left(n\right)}{2}\cdot P\left(n\right)=0$. 于是结合引理 7.1.1 的 (ii) 式和引理 7.1.3 并注意到 Riemann zeta- 函数的恒等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2(n)}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{\zeta^4\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)},$$

我们立刻得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant x}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,\ p>\sqrt{n}}}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,\ p\leqslant\sqrt{n}}}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,\ p\leqslant\sqrt{n}}}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,\ p\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,\ n^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{n}}}\left(S\left(P_d\left(n\right)\right)\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}d\left(n\right)P\left(n\right)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ n_1<p}}\left(S\left(P_d\left(n_1p^2\right)\right)-\frac{1}{2}d\left(n_1p^2\right)P\left(n_1p^2\right)\right)^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right)\\
=&\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\leq\sqrt{\frac{x}{n}}}\left(\frac{3}{2}pd\left(n\right)\right)^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right)\\
=&\frac{9}{4}\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}d^2(n)\sum_{n<p\leq\sqrt{\frac{x}{n}}}p^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right)\\
=&\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{N+1}x}\right),
\end{aligned}
$$

其中 $c_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,N)$ 是可计算的常数且 $c_1=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\zeta^4\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}$. 从而完成了定理的证明.

本定理在著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 及因子积数列 $\{P_d(n)\}$ 基础上, 构造了一个算术函数与最大素因子函数并利用初等方法和素数定理研究了它们的混合均值问题, 并给出了它们的一个较强的渐进公式.

有兴趣的读者可以采取类似方法, 来构造更多的函数, 并研究它们的混合均值.

7.2 关于平方补数 $SSC(n)$ 的两个问题

F. Smarandache 教授在文献 [1] 中还提出了以下这个 Smarandache 平方补数函数:

定义 7.1. 对任意的正整数 n, 著名的 Smarandache 平方补数函数 $SSC(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $m \cdot n$ 为完全平方数, 即就是

$$SSC(n) = \min\{m:\ m \cdot n = k^2, m, k \in Z^*\}.$$

由 $SSC(n)$ 的定义我们不难计算出 $SSC(n)$ 的前几个值为: $SSC(1) = 1, SSC(2) = 2, SSC(3) = 3, SSC(4) = 1, SSC(5) = 5, SSC(6) = 6, SSC(7) = 7, SSC(8) = 2, SSC(9) = 1, SSC(10) = 10, SSC(11) = 11, SSC(12) = 3, SSC(13) = 13, SSC(14) = 14, SSC(15) = 15, SSC(16) = 1, SSC(17) = 17, SSC(18) = 2, SSC(19) = 19, SSC(20) = 5, \cdots$.

关于 $SSC(n)$ 的初等性质, 许多学者进行了研究, 取得了很多有价值的成果. 例如, Russo [61] 对 $SSC(n)$ 进行了研究, 得出了关于 $SSC(n)$ 的一些性质:

性质 1. 对于任意的正整数 n, 有 $SSC(n) \leq n$.

性质 2. 对于任意的正整数 n, 如果 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, 那么

$$SSC(n) = p_1^{\mathrm{odd}(\alpha_1)} p_2^{\mathrm{odd}(\alpha_2)} \cdots p_s^{\mathrm{odd}(\alpha_s)},$$

其中 $\alpha_i \geq 0$, p_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$ 是互不相同的素数, 函数 $\mathrm{odd}(n)$ 定义为:

$$\mathrm{odd}(n) = \begin{cases} 1, & \text{若}n\text{是奇数;} \\ 0, & \text{若}n\text{是偶数.} \end{cases}$$

Russo 同时提出如下问题:

问题 1. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}$.

问题 2. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{SSC(n)}{\theta(n)}$, 其中 $\theta(n)=\sum\limits_{k\le n}\ln SSC(k)$.

关于这两个问题, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有看到过有关方面的论文. 最近樊旭辉 [62] 完全解决了这两个问题, 得出了以下结论:

定理 7.2. 对于任意正整数 $n\geq 1$, 有估计式

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

推论 7.2.1. 对于任意正整数 $n\geq 1$, 有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}=1.$$

定理 7.3. 对于任意正整数 $n\geq 1$, 有估计式

$$\frac{SSC(n)}{\theta(n)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

推论 7.2.2. 对于任意正整数 $n\geq 1$, 有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{SSC(n)}{\theta(n)}=0.$$

为了完成定理的证明, 需要以下几个引理:

引理 7.2.1. 对于任意实数 $x \geq 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\mu^2(n)=\frac{6}{\pi^2}x+O\left(\sqrt{x}\right). \tag{7-1}$$

注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 因此 (7-1) 式可写为

$$\sum_{n\leq x}\mu^2(n)=\frac{x}{\zeta(2)}+O\left(\sqrt{x}\right), \tag{7-2}$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta- 函数.

引理 7.2.2. 对于任意实数 $x \geq 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\ln SSC(n)=x\ln x-Ax+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right), \tag{7-3}$$

其中 A 为常数.

证明: 如果用 $\overline{A}$ 表示所有无平方因子数的集合, 那么由 Abel 求和公式 (参阅文献 [8] 中定理 4.2、引理 1 及性质 2), 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x}\ln SSC(n)\\
=&\sum_{m^2l\leq x l\in\overline{A}}\ln SSC(m^2l)=\sum_{m^2l\leq x l\in\overline{A}}\ln l\\
=&\sum_{m\leq\sqrt{x}}\sum_{l\leq\frac{x}{m^2}}\ln l\cdot\mu^2(l)\\
=&\sum_{m\leq\sqrt{x}}\left\{\ln\frac{x}{m^2}\left[\frac{1}{\zeta(2)}\frac{x}{m^2}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{m}\right)\right]-\int_1^{\frac{x}{m^2}}\frac{1}{t}\left[\frac{t}{\zeta(2)}+O\left(\sqrt{t}\right)\right]dt\right\}\\
=&\sum_{m\leq\sqrt{x}}\left[\frac{x\ln x}{\zeta(2)}\frac{1}{m^2}-\frac{2x}{\zeta(2)}\frac{\ln m}{m^2}-\frac{x}{\zeta(2)}\frac{1}{m^2}+O\left(\frac{\sqrt{x}\ln x}{m}\right)\right].
\end{aligned} \tag{7-4}$$

注意到下列几个渐近公式 [8]:

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\ln x+C+O\left(\frac{1}{x}\right),\text{其中}C\text{为常数};$$

$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)-\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

$\sum_{n\le x}\frac{\ln n}{n^2} = B-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+O\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$, 其中$B = 1+\int_1^{\infty}\frac{(t-[t])(t-2t\ln t)}{t^4}dt$为常数.

由 (7-4) 式, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\ln SSC(n) &= \frac{x\ln x}{\zeta(2)}\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{1}{m^2}-\frac{2x}{\zeta(2)}\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{\ln m}{m^2}\\
&\quad -\frac{x}{\zeta(2)}\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{1}{m^2}+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)\\
&= x\ln x-\frac{2}{\zeta(2)}Bx-x+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)\\
&= x\ln x-Ax+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right),
\end{aligned}$$

其中 $A=\frac{2B}{\zeta(2)}+1$ 为常数.

于是完成了引理 7.2.2 的证明.

定理的证明: 在这一部分, 用初等方法给出定理的证明. 首先证明定理 7.2.

一方面, 由性质 1, 有

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}\le\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{\ln k}}{n}=\frac{n-1}{n}<1. \tag{7-5}$$

另一方面, 由引理 7.2.2, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n} &> \frac{1}{n\ln n}\sum_{k=2}^{n}\ln SSC(k)\\
&= 1-\frac{A}{\ln n}+O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\\
&= 1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right).
\end{aligned}\tag{7-6}$$

结合 (7-5)、(7-6) 式, 有

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理 7.2 的证明.

推论 7.2.1 可理解为定理 7.2 中取 $n\to\infty$ 时的极限.

现在证明定理 7.3.
由性质 1、引理 7.2.2 及 $SSC(n)$ 的定义, 有

$$0 < \frac{SSC(n)}{\theta(n)} < \frac{n}{\theta(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{7-7}$$

由 (7-7) 式, 有

$$\frac{SSC(n)}{\theta(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

于是证明了定理 7.3.

推论 7.2.2 可理解为定理 7.3 中取 $n\to\infty$ 时的极限.

以上我们通过利用初等及解析的方法研究 $\ln SSC(n)$ 的值分布性质, 从而将 Russo [61] 提出的两个极限问题彻底解决. 关于 Smarandache 平方补数函数 $SSC(n)$ 的性质目前知之甚少, 还有许多问题有待有兴趣的学者进行研究. 例如,

问题 1. 求方程 $S(n)^k + Z(n)^k = SSC(n)^k$ 的所有正整数解.

问题 2. 研究函数 $SSC(Z(n))$ 及函数 $Z(SSC(n))$ 的性质.

7.3 关于 Smarandache 幂函数的一个均值问题

定义 7.2. 对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m^m$, 其中 m 和 n 有相同的素因子. 即:

$$SP(n) = \min\left\{m:\ n|m^m,\ m\in\mathbf{N},\ \prod_{p|n}p = \prod_{p|m}p\right\},$$

其中 $\mathbf{N}$ 表示所有自然数的集合. 例如, $SP(n)$ 的前几项为: $SP(1)=1$, $SP(2)=2$, $SP(3)=3$, $SP(4)=2$, $SP(5)=5$, $SP(6)=6$, $SP(7)=7$, $SP(8)=4$, $SP(9)=3$, $SP(10)=10$, $SP(11)=11$, $SP(12)=6$, $SP(13)=13$, $SP(14)=14$, $SP(15)=15$, $SP(16)=4$, $SP(17)=17$, $SP(18)=6$, $SP(19)=19$, $SP(20)=10$, $\cdots$.

F. Smarandache 教授在文献 [1] 中建议我们研究 $SP(n)$ 的性质. 从 $SP(n)$ 的定义, 很容易得到下面的结论: 若 $n=p^{\alpha}$, 其中 p 为一个素数, 则有

$$SP(n)=\begin{cases} p, & 1\le\alpha\le p; \\ p^2, & p+1\le\alpha\le 2p^2; \\ p^3, & 2p^2+1\le\alpha\le 3p^3; \\ \cdots & \cdots \\ p^{\alpha}, & (\alpha-1)p^{\alpha-1}+1\le\alpha\le\alpha p^{\alpha}. \end{cases}$$

令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的素数幂分解式.

显然, $SP(n)$ 不是可乘函数. 例如, $SP(8)=4$, $SP(3)=3$, $SP(24)=6\neq SP(3)\times SP(8)$. 但对几乎所有的 m 和 n 且 $(m,n)=1$, 都有 $SP(mn)=SP(m)\cdot SP(n)$.

在文献 [63] 中, 徐哲峰已经研究了 $SP(n)$ 的均值性质, 并获得了一个较强的渐近公式:

$$\sum_{n\le x}SP(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right),$$

其中 ϵ 表示任意固定的正数, 且 $\prod\limits_p$ 表示对所有素数 p 求乘积.

Zhou Huanqin [64] 研究了一个包含 $SP(n)$ 的无穷级数的收敛性问题, 并证明了对任意的复数 s 满足 $Re(s)>1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu(n)}}{(SP(n^k))^s}=\begin{cases} \dfrac{2^s+1}{2^s-1}\dfrac{1}{\zeta(s)}, & k=1,2; \\ \dfrac{2^s+1}{2^s-1}\dfrac{1}{\zeta(s)}-\dfrac{2^s-1}{4^s}, & k=3; \\ \dfrac{2^s+1}{2^s-1}\dfrac{1}{\zeta(s)}-\dfrac{2^s-1}{4^s}+\dfrac{3^s-1}{9^s}, & k=4,5. \end{cases}$$

田呈亮在文献 [65] 中利用初等方法研究了 $SP(n)$ 与经典数论函数欧拉函数 $\phi(n)$ 的关系, 即研究了方程 $SP(n^k)=\phi(n)$ 的可解性, 并给出了 $k=$ 1, 2, 3 时的所有正整数解, 即下面的结论:
(1) $SP(n)=\phi(n)$ 有且仅有 4 个正整数解 $n=$ 1, 4, 8, 18.
(2) 方程 $SP(n^2)=\phi(n)$ 有且仅有 3 个正整数解 $n=$ 1, 8, 18.
(3) 方程 $SP(n^3)=\phi(n)$ 有且仅有 2 个正整数解 $n=$ 1, 16.

本部分主要目的是利用解析方法研究 $SP(n)$ 的 k 次方幂的分布性质, 给出了 $\sum\limits_{n\leq x} n^l(SP(n))^k$ 及 $\sum\limits_{n\leq x}\frac{(SP(n))^k}{n^l}$ $(k>0,l\geq 0)$ 的渐近公式, 推广了文献 [63] 的结论.

定理 7.4.[67] 对任意的实数 $x\geq 3$ 及给定的实数 k,l $(k>0,l\geq 0)$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} n^l(SP(n))^k=\frac{\zeta(k+1)}{(k+l+1)\zeta(2)}x^{k+l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{(SP(n))^k}{n^l}=\frac{\zeta(k+1)}{(k-l+1)\zeta(2)}x^{k-l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中, $\prod\limits_p$ 表示对所有素数 p 求积, ε 表示任意的正数, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

推论 7.3.1. 对任意的实数 $x\geq 3$ 及给定的实数 $k'>0$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(SP(n))^{\frac{1}{k'}}=\frac{6k'\zeta(\frac{1+k'}{k'})}{(k'+1)\pi^2}x^{\frac{k'+1}{k'}}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\frac{1}{k'}}(1+p)}\right)+O\left(x^{\frac{k'+2}{2k'}+\varepsilon}\right),$$

特别地,

$$\sum_{n\leq x}(SP(n))^{\frac{1}{3}}=\frac{9\zeta(\frac{4}{3})}{2\pi^2}x^{\frac{4}{3}}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}(1+p)}\right)+O\left(x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{n\leq x}(SP(n))^{\frac{1}{2}}=\frac{4\zeta(\frac{3}{2})}{\pi^2}x^{\frac{3}{2}}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}(1+p)}\right)+O\left(x^{1+\varepsilon}\right).$$

推论 7.3.2. 对任意实数 $x \geq 3$ 及给定的实数, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} n^l(SP(n)) = \frac{1}{(l+2)} x^{l+2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(1+p)}\right) + O\left(x^{l+\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{n\leq x} n^l(SP(n))^2 = \frac{6\zeta(3)}{(l+3)\pi^2} x^{l+3} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2(1+p)}\right) + O\left(x^{l+\frac{5}{2}+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{n\leq x} n^l(SP(n))^3 = \frac{\pi^2}{15(l+4)} x^{l+4} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^3(1+p)}\right) + O\left(x^{l+\frac{7}{2}+\varepsilon}\right).$$

为了完成定理的证明, 需要下列的引理.

设 $s = \sigma + it$, $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta- 函数, $k > 0, l \geq 0$ 为给定的两个实数, p 为素数. 令 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $U(n) = \prod\limits_{p|n} p$.

引理 7.3.1. 对任意的实数 $x \geq 1$ 及给定的实数 $k \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} (U(n))^k = \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)} x^{k+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)}\right) + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

证明: 令 $A(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(U(n))^k}{n^s}$, 由于 $U(n)$ 是积性函数, 根据文献 [66] 中的 Euler 积分式, 当 $\sigma > k+1$ 时, 可得

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(U(n))^k}{n^s} = \prod_p \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(U(p^m))^k}{p^m}\right] \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{p^k}{p^s} + \frac{p^k}{p^{2s}} + \cdots\right) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p^{s-k})}\right). \end{aligned}$$

令 $h(s) = \prod\limits_p \left(1 - \dfrac{1}{p^k(1+p^{s-k})}\right)$, 当 $\sigma > k+1$ 时, $|U(n)| \leq n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(U(n))^k}{n^\sigma} < \zeta(\sigma - k)$, 由文献 [66] 中的 Perron 公式知,

$$\sum_{n\leq x} \frac{a(n)}{n^{s_0}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} A(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right) \\ &\quad + O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min(1,\frac{\lg x}{T})\right) + O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min(1,\frac{x}{T\|x\|})\right), \end{aligned}$$

其中, N 为离 x 最近的整数, 当 x 为半奇数时, 取 $N = x-\frac{1}{2}, \|x\| = |x-N|$. 取 $a(n) = (U(n))^k, s_0 = 0, b = k+\frac{3}{2}, T = x^{k+\frac{1}{2}}, H(x) = x, B(\sigma) = \zeta(\sigma-k)$, 则

$$\sum_{n\leq x}(U(n))^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{k+\frac{3}{2}-iT}^{k+\frac{3}{2}+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s} + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

将积分线从 $s = k+\frac{3}{2}\pm iT$ 移到 $k+\frac{1}{2}\pm iT$, 此时函数 $\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s=k+1$ 处有一个一阶极点, 其留数为

$$\begin{aligned} L(x) &= \operatorname*{Res}_{s=k+1}\left(\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s}\right) \\ &= \lim_{s\to k+1}\left((s-k-1)\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s}\right) \\ &= \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}h(k) \end{aligned}$$

其中, $h(k) = \prod\limits_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)$. 容易估计,

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{k+\frac{3}{2}+iT}^{k+\frac{1}{2}+iT} + \int_{k+\frac{1}{2}+iT}^{k+\frac{1}{2}-iT} + \int_{k+\frac{1}{2}-iT}^{k+\frac{3}{2}+iT}\right)\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s} \ll x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

所以,

$$\sum_{n\leq x}(U(n))^k = \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right) + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

引理 7.3.1 得证.

引理 7.3.2. 对任意的实数 $x \geq 3$、给定的实数 $k > 0$ 及正整数 α, 有

$$\sum_{\substack{p^\alpha\leq x\\ \alpha>p}}(\alpha p)^k \ll \ln^{2k+1} x.$$

证明: 设 $\pi(x)=\sum\limits_{p\leq x}1$, 由文献 [27] 知,

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

由 Abel 等式, 可得

$$\sum_{p\leq x}p^k=\pi(x)x^k-k\int_2^x\pi(t)t^{k-1}dt.$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq\ln x}p^k &= \frac{\ln^k x}{(k+1)}+O\left(\ln^{k-1}x\right)-k\int_2^{\ln x}\frac{t^k}{\ln t}dt+O\left(\int_2^{\ln x}\frac{t^k}{\ln^2 x}dt\right)\\ &= \frac{\ln^k x}{k+1}+O\left(\ln^{k-1}x\right).\end{aligned}$$

因为 $\alpha>p$, 所以 $p^p<p^\alpha\leq x$. 那么

$$p<\frac{\ln x}{\ln p}<\ln x,\quad \alpha\leq\frac{\ln x}{\ln p}.$$

又

$$\sum_{n\leq x}n^k=\frac{x^{k+1}}{k+1}+O\left(x^k\right).$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p^\alpha\leq x\\ \alpha>p}}(\alpha p)^k &= \sum_{p\leq\ln x}p^k\sum_{\alpha\leq\frac{\ln x}{\ln p}}\alpha^k\ll\ln^{k+1}x\sum_{p\leq\ln x}\frac{p^k}{\ln^{k+1}p}\\ &\ll \ln^{k+1}x\sum_{p\leq\ln x}p^k\ll\ln^{2k+1}x.\end{aligned}$$

引理 7.3.2 得证.

定理的证明: 令 $\mathscr{A}=\{n|n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},\alpha_i\leq p_i,i=1,2,\cdots,r\}$, 当 $n\in\mathscr{A}$ 时, 有 $SP(n)=U(n)$, 当 $n\in N$ 时, 有 $SP(n)\geq U(n)$, 从而

$$\sum_{n\leq x}(SP(n))^k-\sum_{n\leq x}(U(n))^k=\sum_{n\leq x}\left[(SP(n))^k-(U(n))^k\right]\ll\sum_{\substack{n\leq x\\ SP(n)>U(n)}}(SP(n))^k.$$

由文献 [63] 知, 存在正整数 α 及素数 p, 使得 $SP(n) < \alpha p$, 根据引理 7.3.2 可得

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ SP(n)>U(n)}}(SP(n))^k < \sum_{\substack{n\leq x\\ SP(n)>U(n)}}(\alpha p)^k \ll \sum_{n\leq x}\sum_{\substack{p^\alpha\leq x\\ \alpha>p}}(\alpha p)^k \ll x\ln^{2k+1}x.$$

故

$$\sum_{n\leq x}(SP(n))^k-\sum_{n\leq x}(U(n))^k \ll x\ln^{2k+1}x.$$

由引理 7.3.1 知,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x}(SP(n))^k\\
=\ &\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)+O\left(x\ln^{2k+1}x\right)\\
=\ &\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

设 $B(x)=\sum\limits_{n\leq x}(SP(n))^k$, 利用 Abel 求和公式, 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x}n^l(SP(n))^k\\
=\ &x^lB(x)-1-l\int_1^x B(t)t^{l-1}dt\\
=\ &\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\\
&-\frac{l\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)\int_1^x t^{k+l}dt+O\left(\int_1^x t^{k+l-\frac{1}{2}+\varepsilon}dt\right)\\
=\ &\frac{\zeta(k+1)}{(k+l+1)\zeta(2)}x^{k+l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x}\frac{(SP(n))^k}{n^l}\\
=\ &x^{-l}B(x)-1+l\int_1^x B(t)t^{-l-1}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k-l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\\
&\quad+\frac{l\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)\int_1^x t^{k-l}dt+O\left(\int_1^x t^{k-l-\frac{1}{2}+\varepsilon}dt\right)\\
&= \frac{\zeta(k+1)}{(k-l+1)\zeta(2)}x^{k-l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

定理得证.

根据定理, 取 $l=0, k=\frac{1}{k'}$, 即可得到推论 7.3.1; 取 $k=1,2,3$, 考虑到 $\zeta(2)=\pi^2/6, \zeta(4)=\pi^4/90$, 即可证得推论 7.3.2. 可以看出, 该定理是对文献 [63] 的推广.

7.4 关于 Smarandache 简单函数

F. Smarandache 教授在文献 [1] 中第 42 个问题定义了 Smarandache 简单函数如下:

定义 7.3. 设 n 为正整数, Smarandache 简单函数 $S_p(n)$ 定义为: 满足 $p^n|m!$ 的最小正整数 $m\in\mathbf{N}$, 即:

$$S_p(n)=\min\left\{m:\ p^n|m!,\ m\in\mathbf{N}\right\}.$$

文献 [68] 定义了 Smarandache 简单函数的加法类似函数如下:

定义 7.4. 设 $\overline{S}_p(n)=\min\left\{m:\ p^n\le m!!,\ m\in\mathbf{N}\right\}\ (n\in(1,\infty))$ 和 $\overline{S}_P^{\,*}(n)=\max\left\{m:\ m!!\le p^n,\ m\in\mathbf{N}\right\}\ (n\in(1,\infty))$, 则称 $\overline{S}_p(n)$ 和 $\overline{S}_p^{\,*}(n)$ 为 Smarandache 简单函数的加法类似.

显然, 若 $(m-2)!!<p^n\le m!!$, $\overline{S}_p(n)=m$, 其中 $m>2$. 关于 $\overline{S}_p(n)$ 的性质, 许多学者都进行了研究, 参见文献 [69-72]. 如文献 [72] 研究了 $d(\overline{S}_p(n))$ 的均值性质, 得出了渐近公式:

$$\sum_{n\le x}d(\overline{S}_p(n))=2x(\ln x-2\ln\ln x)+O\left(x\ln p\right).$$

本节主要研究 $\sigma_\alpha(\overline{S}_p(n))$ 的渐近性质, 其中 $\sigma_\alpha(n)=\sum\limits_{d|n}d^\alpha$ 是除数和函数, 并且得到了两个较为精确的渐近公式.

定理 7.5.[73] 设 p 为一个给定的素数, 对任意实数 $x\geq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(\overline{S}_p(n))=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{3}\dfrac{x^2\ln p}{\ln^2 x}\ln\left(\dfrac{2x\ln p}{\ln x}\right)+O\left(\dfrac{x^2}{\ln^2 x}\right), \text{如果}\alpha=1,\\ \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}\dfrac{2^{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^\alpha p}{\ln^{\alpha+1}x}\ln\left(\dfrac{2x\ln p}{\ln x}\right)+O\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\ln^{\alpha+1}x}\right),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{如果}\alpha\neq 1.\end{cases}$$

定理 7.6.[73] 设 p 为一个给定的素数, 对任意实数 $x\geq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(\overline{S}_p^{\,*}(n))=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{3}\dfrac{x^2\ln p}{\ln^2 x}\ln\left(\dfrac{2x\ln p}{\ln x}\right)+O\left(\dfrac{x^2}{\ln^2 x}\right), \text{如果}\alpha=1,\\ \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}\dfrac{2^{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^\alpha p}{\ln^{\alpha+1}x}\ln\left(\dfrac{2x\ln p}{\ln x}\right)+O\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\ln^{\alpha+1}x}\right),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{如果}\alpha\neq 1.\end{cases}$$

引理 7.4.1. 对任意实数 $x\geq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x}\sigma_1(n)=\frac{\pi^2}{12}x^2+O\left(x\ln x\right).$$

引理 7.4.2. 对任意实数 $x\geq 1$ 和 $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$, 有

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O\left(x^\beta\right),$$

其中 $\beta=\max\{1,\alpha\}$.

引理 7.4.1 和引理 7.4.2 的证明见文献 [8].

定理的证明: 由 $\overline{S}_p(n)$ 的定义知, 当 $n\in\left(\dfrac{\ln(m-2)!!}{\ln p},\dfrac{\ln m!!}{\ln p}\right]$, 有 $\overline{S}_p(n)=m$. 若 $(m-2)!!<p^x\leq m!!$, 则 $\left|m-\dfrac{2x\ln p}{\ln x}\right|\ll\ln\ln x$. 由引理 7.4.1 和 Abel 等式, 有

$$\sum_{n\leq x}\sigma_1(\overline{S}_p(n))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \sum_{\frac{\ln(m-2)!!}{\ln p}<n\le\frac{\ln m!!}{\ln p}} \sigma_1(m) + \sum_{\frac{2x\ln p}{\ln x}<m<\frac{2x\ln p}{\ln x}+\ln\ln x} \sum_{\frac{\ln(m-2)!!}{\ln p}<n\le\frac{\ln m!!}{\ln p}} \sigma_1(m)\\
&= \sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]\sigma_1(m) + O\left(\sum_{\frac{2x\ln p}{\ln x}<m<\frac{2x\ln p}{\ln x}+\ln\ln x} \frac{\ln x}{\ln p}\sigma_1(m)\right)\\
&= \sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]\sigma_1(m) + O\left(x\ln\ln x\right)\\
&= \sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \frac{\ln m}{\ln p}\sigma_1(m) + O\left(\sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}}\sigma_1(m)\right) + O\left(x\ln\ln x\right)\\
&= \frac{1}{\ln p}\sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \ln m\sigma_1(m) + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)\\
&= \frac{1}{\ln p}\left(\ln\left(\frac{2x\ln p}{\ln x}\right)\sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}}\sigma_1(m) - \int_1^{\frac{2x\ln p}{\ln x}}\frac{1}{t}\sum_{m\le t}\sigma_1(t)dt\right) + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)\\
&= \frac{1}{\ln p}\ln\left(\frac{2x\ln p}{\ln x}\right)\frac{\pi^2}{12}\frac{4x^2\ln^2 p}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln p}\int_1^{\frac{2x\ln p}{\ln x}}\frac{1}{t}\left(\frac{\pi^2}{12}t^2 + O\left(t\ln t\right)\right)dt\\
&\quad +O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)\\
&= \frac{\pi^2}{3}\frac{x^2\ln p}{\ln^2 x}\ln\left(\frac{2x\ln p}{\ln x}\right) + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).
\end{aligned}
$$

如果 $\alpha\neq 1$, 由引理 7.4.2 和 Abel 等式, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(\overline{S}_p(n))\\
&= \sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \sum_{\frac{\ln(m-2)!!}{\ln p}<n\le\frac{\ln m!!}{\ln p}} \sigma_\alpha(m) + \sum_{\frac{2x\ln p}{\ln x}<m<\frac{2x\ln p}{\ln x}+\ln\ln x} \sum_{\frac{\ln(m-2)!!}{\ln p}<n\le\frac{\ln m!!}{\ln p}} \sigma_\alpha(m)\\
&= \sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \frac{\ln m}{\ln p}\sigma_\alpha(m) + O\left(\sum_{\frac{2x\ln p}{\ln x}<m<\frac{2x\ln p}{\ln x}+\ln\ln x} \frac{\ln x}{\ln p}\sigma_\alpha(m)\right)\\
&= \sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]\sigma_\alpha(m) + O\left(\sum_{m\le \frac{2x\ln p}{\ln x}}\sigma_\alpha(m)\right) + O\left(x\ln\ln x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ln p} \sum_{m \le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \ln m \sigma_\alpha(m) + O\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\ln^{\alpha+1} x}\right) \\
&= \frac{1}{\ln p}\left(\ln\left(\frac{2x\ln p}{\ln x}\right) \sum_{m \le \frac{2x\ln p}{\ln x}} \sigma_\alpha(m) - \int_1^{\frac{2x\ln p}{\ln x}} \frac{1}{t}\sum_{m\le t}\sigma_\alpha(t)dt\right) \\
&\quad + O\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\ln^{\alpha+1} x}\right) \\
&= \frac{1}{\ln p}\ln\left(\frac{2x\ln p}{\ln x}\right)\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}\frac{2^{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^{\alpha+1} p}{\ln^{\alpha+1} x} \\
&\quad - \frac{1}{\ln p}\int_1^{\frac{2x\ln p}{\ln x}} \frac{1}{t}\left(\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}t^2 + O\left(t^\alpha\right)\right)dt + O\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\ln^{\alpha+1} x}\right) \\
&= \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}\frac{2^{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^{\alpha+1} p}{\ln^{\alpha+1} x}\ln\left(\frac{2x\ln p}{\ln x}\right) + O\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\ln^{\alpha+1} x}\right).
\end{aligned}
$$

这就完成了定理 7.5 的证明. 用同样的方法可以证明定理 7.6.

7.5 Smarandache k 次补数函数

定义 7.5. 设 $k \ge 2$ 为整数, 对于任意正整数 $n \ge 2$, 若 $A_k(n)$ 是满足 $A_k(n) \times n$ 为完全 k 次方的最小正整数, 称 $A_k(n)$ 为 n 的 k 次补数函数, 也称 $A_k(n)$ 为 n 的 k 次补数. 例如, $A_2(1) = 1$, $A_2(2) = 2$, $A_2(3) = 3$, $A_2(4) = 1$, $A_2(5) = 5$, $A_2(6) = 6$, $A_2(7) = 7$, $A_2(8) = 2$, $\cdots$, 即 $A_k(2) = 2^{k-1}$, $A_k(3) = 3^{k-1}$, $A_k(2^k) = 1$, $\cdots$.

定义 7.6. 对任意整数 $k \ge 2$, $a_k(n)$ 是满足 $a_k(n) + n$ 为完全 k 次方的最小正整数, 称 $a_k(n)$ 为 n 的 k 次可加的补数函数, 也称 $a_k(n)$ 为 n 的 k 次可加补数.

定义 7.7. 对任意整数 n, $f_k(n) = \min\{r : 0 \le r = n - m^k, m \in \mathbf{N}\}$, 称 $f_k(n)$ 为 n 的 k 次减法补函数, 即 $f_k(n)$ 是非负整数, $n - f_k(n)$ 是一个完全 k 次方任何非负算数函数 $h(n)$ 的最小正整数. 亦称 $f_k(n)$ 为 n 的 k 次减法补数.

定义 7.8. 对正整数 n, 若其标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 定义

$$\Omega(n)=\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k, & \text{当} n>1,\\ 0, & \text{当} n=1.\end{cases}$$

对 Smarandache 的 k 次方补数问题, 有很多学者已经做过研究并获得了一些有趣的结果 [74−76], 如文献 [74] 对可加的 k 次方可加补数 $a_k(n)$ 给出了渐近公式: 对任意实数 $x\geq 3$,

$$\sum_{n\leq x}a_k(n)=\frac{k^2}{4k-2}x^{2-\frac{1}{k}}+O\left(x^{2-\frac{2}{k}}\right).$$

$$\sum_{n\leq x}d(a_k(n))=(1-\frac{1}{k})x\ln x+(2\gamma+\ln k-2+\frac{1}{k})+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\ln x\right),$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数, γ 为欧拉常数.

在文献 [74] 基础上, 本节运用初等和解析方法研究了 $n-f_k(n)$ 的均值及和的性质, 获得了一些有趣的渐近公式 (见文献 [78]), 扩展了 F. Smarandache 教授在 [1] 一书中所涉及问题的研究工作.

定理 7.7. 对于任何实数 $x>1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\Omega(n-f_k(n))=kx\ln\ln x+k(A-\ln k)x+A_2x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中, $A=\gamma+\sum\limits_{p}(\ln(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{p-1})$, $\sum\limits_{p}$ 表示素数之和, γ 是欧拉常数.

定理 7.8. 对于任何实数 $x\geq 3$ 和整数 $k\geq 2$, 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-f_k(n))^{\alpha}}$, 当 $\alpha\leq 1$ 时, 级数是发散的; 当 $\alpha>1$ 时, 级数是收敛的, 且

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-f_k(n))^{\alpha}} &= C_k^1\zeta(k\alpha-k+1)+C_k^2\zeta(k\alpha-k+2)+\cdots\\ &\quad +C_k^2\zeta(k\alpha-2)+C_k^1\zeta(k\alpha-1)+\zeta(k\alpha),\end{aligned}$$

其中, $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数, 特别当 $k=\alpha=2$, 及 $k=\alpha=3$, 可推出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-f_2(n))^2}=2\zeta(3)+\zeta(4),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-f_3(n))^3}=3\zeta(7)+3\zeta(8)+\zeta(9)2\zeta(3)+\zeta(4).$$

要完成定理的证明需要以下引理:

引理 7.5.1. 对任意实数 $x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\Omega(n)=x\ln\ln x+Ax+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中, $A=\gamma+\sum\limits_{p}(\ln(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{p-1})$, $\sum\limits_{p}$ 表示素数之和, γ 是欧拉常数.

证明: 见文献 [77].

定理的证明: 首先来证明定理 7.7. 对于任意正整数 $x\geq 2$, 存在正整数 M, 使得 $M^k\leq x<(M+1)^k$, 可以推断, 令 $M=[x^{1/k}]$, 并注意到 $x^{1/k}-M=O(1)$, 对任意素数 p 及其重数 α, 注意到 $\Omega(p^\alpha)=\alpha p$ 及

$$(x+1)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i x^{k-i},$$

可以推断

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x}\Omega(n-f_k(n))\\
=&\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{t^k\leq n\leq(t+1)^k}\Omega(n-f_k(n))+O\left(\sum_{M^k\leq n<x}\Omega(n-f_k(n))\right)\\
=&\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{t^k\leq n\leq(t+1)^k}\Omega((t+1)^k)+O\left(\sum_{M^k\leq n<(M+1)^k}\Omega((M+1)^k)\right)\\
=&\sum_{t=1}^{M-1}k(C_k^1t^{k-1}+C_k^2t^{k-2}+C_k^3t^{k-3}+\cdots+C_k^1t^1+1)\Omega(t+1)\\
&+O\left(x^{(k-1)/k}+\varepsilon\right)\\
=&k^2\sum_{t=1}^{M-1}(t+1)^{k-1}\Omega(t+1)+O\left(x^{(k-1)/k}+\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad k^2\sum_{t=1}^{M}(t)^{k-1}\Omega(t)+O\left(x^{(k-1)/k}+\varepsilon\right),$$

$$\Omega(n)\ll n^{\varepsilon},$$

令 $A(x)=\sum\Omega(n)$, 用 Abel 求和公式易得

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{M}(t)^{k-1}\Omega(t)\\
= \quad & M^{k-1}A(M)-\int_2^M A(t)((t)^{k-1})'dt+O(1)\\
= \quad & M^{k-1}\left(M\ln\ln M+AM+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)\right)\\
& -\int_2^M\left(t\ln\ln t+At+O\left(\frac{t}{\ln t}\right)\right)(k-1)t^{k-2}dt+O(1)\\
= \quad & M^k\ln\ln M+AM^k+O\left(\frac{M^k}{\ln M}\right)\\
& -\int_2^M((k-1)t^{k-1}\ln\ln t+A(k-1)t^{k-1})dt\\
= \quad & M^k\ln\ln M+AM^k-\frac{k-1}{k}(M^k\ln\ln M+AM^k)+O\left(\frac{M^k}{\ln M}\right)\\
= \quad & \frac{1}{k}M^k\ln\ln M+\frac{A}{K}M^k+O\left(\frac{M^k}{\ln M}\right),
\end{aligned}$$

由于 $0\le x-M^k<(M+1)^k-M^k=C_k^1M^{k-1}+C_k^2M^{k-2}+C_k^3M^{k-3}+\cdots+C_k^1M^1+1\le x^{(k-1)/k}$, $\ln k+\ln\ln M\le\ln\ln x<\ln k+\ln\ln(M+1)<\ln k+\ln\ln M+O\left(x^{-1/k}\right)$,
从而有

$$\sum_{t=1}^{M}(t)^{k-1}\Omega(t)=\frac{1}{k}x\ln\ln M+(A-\ln k)x^k+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

$$\sum_{n\le x}\Omega(n-f_k(n))=x\ln\ln x+k(A-\ln k)x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

这就完成定理 7.7 的证明.

下证定理 7.8. 对任意正整数 $n \geq 1$, 存在正整数 m, 使得 $m^k \leq n < (m+1)^k$, 可以推断, 满足 $n - f_k(n) = m^k$ 等式 n 共有 $((m+1)^k - m^k)$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - f_k(n))^{\alpha}} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+1)^k - m^k}{m^{k\alpha}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_k^1 m^{k-1} + C_k^2 m^{k-2} + + \cdots + C_k^2 m^2 + C_k^1 m^1 + 1}{m^{k\alpha}}\end{aligned}$$

由正项级数审敛法知对任何实数 $\alpha \leq 1$, 级数是发散的, 如果 $\alpha > 1$, 级数是收敛的, 其和为

$$C_k^1 \zeta(k\alpha - k + 1) + C_k^2 \zeta(k\alpha - k + 2) + \cdots + C_k^2 \zeta(k\alpha - 2) + C_k^1 \zeta(k\alpha - 1) + \zeta(k\alpha).$$

这就完成定理 7.8 的证明.

在定理 7.8 中取 $k = \alpha = 2$ 及 $k = \alpha = 3$ 即得推论.

7.6 一个包含 Gauss 函数的方程及其实数解

F. Smarandache 曾提出如下问题:

问题 1. 寻求方程

$$x^y - [x] = y \tag{7-8}$$

的所有实数解, 其中 $[x]$ 是不超过 x 的最大正整数.

对此问题, Smarandache 并未完全解决. 例如以下情况尚未讨论:

(a) $y \in \dfrac{R}{Q}$;

(b) $y = \dfrac{m}{n} \in \dfrac{Q}{Z}$;

注: Smarandache 指出若 y 是大于 1 的奇数, 则有

$$x = (y+1)^{\frac{1}{y}}. \tag{7-9}$$

对于此情况, 等式 (7-9) 不受限制. 因若 $y > 0$, 则有

$$y + 1 < (1+1)^y = 2^y.$$

故将等式 (7-9) 代入方程 (7-8), 于是有

$$x^y - [x] = (y+1)^{\frac{y}{y}} - \lfloor (y+1)^{\frac{1}{y}} \rfloor = y + 1 - 1 = y. \tag{7-10}$$

等式 (7-10) 表明当 $0 < y \in R$ 时, 方程 (7-8) 的解为 $x = (y+1)^{\frac{1}{y}}$. 但当 $y < 0$ 时, 因为要考虑到复数, 所以寻求方程 (7-8) 的解会比较困难, 这有待我们进一步讨论.

问题 2. 寻求方程 $x^y - [x]^y = y$ 的所有实数解.

问题 3. 寻求方程 $x^y - [x]^y = x$ 的所有实数解.

问题 4. 寻求方程 $x[y] - [x]y = |x-y|$ 的所有实数解.

问题 5. 寻求方程 $x^{[y]} - y^{[x]} = |x-y|$ 的所有实数解.

问题 4 已被尚松叶完全解决, 见文献 [79]. 最近, 王锦瑞 [80] 利用初等方法对方程 $x^y - [x]^y = x$ 的可解性进行了研究, 同时应用 Mathematic 5.0 软件可以验证该方程在每个区间 $[n, n+1]$ $(n \in \mathbf{N})$ 上都存在实数解. 由于 x, y 的变化性非常大, 很难给出方程所有解的具体形式, 所以她仅考虑了 $x, y > 0$ 时的情况. 对于 $x, y < 0$ 时的情况, 可以利用对称得出. 在 $y \geq 1$ 时, 方程均有实数解. 对于 y 取很小的正整数时, 可以固定 y 值, 把方程转化为关于 x 的方程, 然后解出 x. 具体说就是证明了以下的:

引理 7.6.1. 三次方程 $x^3 - px - q = 0$ $(p, q > 0)$ 的实数解为 $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}}$.

定理 7.9. 对任意正整数 N, M 及给定的 $y \in \mathbf{Q}^+ \backslash \{0 < y \leq 2\}$, 方程 $x^y - [x]^y = x$ 在区间 $[N, M]$ 上有且只有 $M - N + O(1)$ 个实数解.

证明: 令 $f(x) = x^y - [x]^y - x$. 当 $y > 2$ 时, 在区间 $[n, n+1)$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$ 内, $f(n) = n^y - n^y - n < 0$, 又 $\lim\limits_{x \to (n+1)^-} f(x) = (n+1)^y - n^y - n - 1 = n^y(1+\frac{1}{n})^y - n^y - n - 1$, 因为 $(1+\dfrac{1}{n})^y > 1 + \dfrac{y}{n}$, 故 $\lim\limits_{x \to (n+1)^-} f(x) = n^y(1+\dfrac{1}{n})^y - n^y - n - 1 > n^y + yn^{y-1} - n^y - n - 1 = yn^{y-1} - n - 1 > 0$. 即存在 $0 < \delta < 1$, 使得当 $n < x < n + \delta$ 时, $f(x) > 0$ 成立.

同时令 $f(\theta) = (n+\theta)^y - n^y - y\ (0 \le \theta < 1)$, 故 $f'(\theta) = y(n+\theta)^{y-1} > 0$. 所以函数 $f(x)$ 在 $[n, n+\delta]$ 内连续递增. 利用零点存在定理可知, 在每个区间 $[n, n+\delta]$ 上, $f(x) = 0$ 有且只有一个解. 也就是说, 当 $x \in [N, M]$, $N, M \in \mathbf{N}^+$ 时, 方程 $x^y - [x]^y = x$ 有且只有 $M - N + O(1)$ 个实数解. 因此方程 $x^y - [x]^y = x$ 有无穷多实数解.

推论 7.6.1. 方程 $x^y - [x]^y = x$ 有实数解 $\begin{cases} x \in [0,1), \\ y = 1. \end{cases}$

证明: 当 $y = 1$ 时, 原方程 $x^y - [x]^y = x$ 变为 $x - [x] = x$, 即 $[x] = 0$. 所以 $x \in [0,1)$. 于是方程 $x^y - [x]^y = x$ 有实数解 $\begin{cases} x \in [0,1), \\ y = 1. \end{cases}$

推论 7.6.2. 方程 $x^y - [x]^y = x$ 有实数解 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2} \quad (n \in \mathbf{N}^+), \\ y = 2. \end{cases}$

证明: 当 $y = 2$ 时, 原方程 $x^y - [x]^y = x$ 即为一元二次方程 $x^2 - [x]^2 - x = 0$. 若 $x = 0$ 时, 方程 $x^2 - [x]^2 - x = 0$ 显然成立, 所以方程 $x^y - [x]^y = x$ 有实数解 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$

若 $x \in [n, n+1)$, $x^y - [x]^y = x$ 方程变为 $x^2 - x - n^2 = 0$. 解之, $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2} \quad (n \in \mathbf{N}^+)$.

显然, $2n < \sqrt{1+4n^2} < 2n+1$. 由于 $\dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2} - n = \dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}-2n}{2} > 0$, 且 $n + 1 - \dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2} = \dfrac{2n+2-1-\sqrt{1+4n^2}}{2} > 0 \quad (n \in \mathbf{N}^+)$, 所以 $n \le x = \dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2} < n+1$, 故 $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2} \quad (n \in \mathbf{N}^+)$ 满足方程 $x^2 - x - n^2 = 0$, 即 $\begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2} \quad (n \in \mathbf{N}^+) \\ y = 2 \end{cases}$ 是方程 $x^y - [x]^y = x$ 的实数解.

推论 7.6.3. 方程
$$x^y-[x]^y=x$$
有实数解
$$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \quad 及 \begin{cases} x=\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}+\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}-\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}} \quad (n\in\mathbf{N}^+), \\ y=3. \end{cases}$$

证明: 当 $y=3$ 时, 原方程 $x^y-[x]^y=x$ 即为 $x^3-x-[x]^3=0$, 故方程 $x^y-[x]^y=x$ 有实数解 $\begin{cases} x=0, \\ y=3. \end{cases}$

若 $x\in[n,n+1)$ $(n\in\mathbf{N}^+)$, 方程 $x^y-[x]^y=x$ 变为 $x^3-n^3-x=0$, 利用引理可得 $x=A+B$, 其中: $A=\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}+\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}}$, $B=\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}-\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}}$.

显然
$$\begin{aligned} A+B &= \sqrt[3]{\frac{n^3}{2}+\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}-\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}} \\ &> \sqrt[3]{\left(\frac{n^3}{2}+\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}\right)+\left(\frac{n^3}{2}-\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}\right)} \\ &= n, \end{aligned}$$

因为 $(A+B)^3=A^3+B^3+3A^2B+3AB^2=n^3+(A+B)$, $A>0$, $B>0$, 所以 $A+B\geq n$.

因为
$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}+\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}-\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}} \\ < \ & 2\sqrt[3]{\left(\frac{n^3}{2}+\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}\right)} \\ < \ & 2\left[\left(\frac{n^3}{2}\right)^{1/3}+\left(\frac{n^6}{4}+\frac{1}{27}\right)^{1/6}\right] \end{aligned}$$

$$< \ 2\left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}}+n\right) < n+2n=3n,$$

故 $(A+B)^3=n^3+(A+B)<n^3+3n<(n+1)^3$, 即 $A+B<n+1$.

从而 $x=\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}+\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}-\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}}\in[n,n+1)$, 即

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}+\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n^3}{2}-\sqrt{\frac{n^6}{4}-\frac{1}{27}}} \ \ (n\in\mathbf{N}^+), \\ y=3. \end{cases}$$

是方程 $x^y-[x]^y=x$ 的实数解.

7.7 n 进制中非零数字倒数平方和函数均值

F. Smarandache 教授在文献 [1] 中提出的第 22 个问题是 "研究十进制中数字之和数列的性质". 文献 [81-83] 将这一问题一般化, 主要研究了 n 进制中数字之和函数、数字平方和函数的均值. 杨倩丽和行敏 [84] 在此基础上, 通过推理论证给出了 n 进制中非零数字倒数平方和函数 $a(m,n)$ 的均值, 即 $A(m,n)$ 的精确计算公式. 为了叙述方便, 引入如下定义:

定义 7.9. 设 n $(n\geq 2)$ 为一给定的正整数, 对任一正整数 m, 假定 m 在 n 进制中表示为 $m=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$, 其中 $1\leq a_i\leq n-1$, $i=1,2,\cdots,s$, $k_1>k_2>\cdots>k_s\geq 0$, 则称 $a(m,n)=\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_s^2}$ 为 n 进制中非零数字倒数平方和函数, $A(N,n)=\sum\limits_{m<N}a(m,n)$ 为函数 $a(m,n)$ 的均值.

为了简化公式, 记 $\varphi_r(\dfrac{1}{n})=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i^r}$.

定理 7.10. 设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$, 其中 $1\leq a_i<n$, $i=1,2,\cdots,s$, $k_1>k_2>\cdots>k_s\geq 0$, 则有

$$A(N,n)=\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{k_ia_i\varphi_2(\frac{1}{n})}{n}+\varphi_2(\frac{1}{a_i})+\left(a_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j^2}\right)\right\}n^{k_i}.$$

特别当 $n=2$ 时, 有如下推论:

推论 7.7.1. 设 $N=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_s}$, 其中 $k_1>k_2>\cdots>k_s\geq 0$, 则

$$A(N,2)=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{k_i}{2}+(i-1)\right)2^{k_i}.$$

为了完成定理的证明, 需要引入下面两个引理:

引理 7.7.1.

$$A(n^k,n)=kn^{k-1}\varphi_2(\frac{1}{n}). \tag{7-11}$$

证明: 当 $k=1$ 时, 左边 $=A(n,n)=\sum\limits_{m<N}a(m,n)=a(1,n)+a(2,n)+\cdots+a(n-1,n)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}=\varphi_2(\frac{1}{n})=$ 右边, 故命题成立.

假设 $k=p$ 时命题成立, 即

$$A(n^p,n)=pn^{p-1}\varphi_2(\frac{1}{n}). \tag{7-12}$$

那么当 $k=p+1$ 时,

$$\begin{aligned}
&A(n^{p+1},n)=\sum_{m<n^{p+1}}a(m,n)\\
=&\sum_{m<n^p}a(m,n)+\sum_{n^p\leq m<2n^p}a(m,n)+\cdots+\sum_{(n-1)n^p\leq m<n^{p+1}}a(m,n)\\
=&\sum_{m<n^p}a(m,n)+\sum_{0\leq m<n^p}a(m+n^p,n)+\cdots\\
&+\sum_{0\leq m<n^p}a(m+(n-1)n^p,n)\\
=&\sum_{m<n^p}a(m,n)+\sum_{0\leq m<n^p}\left(a(m,n)+\frac{1}{1^2}\right)+\cdots\\
&+\sum_{0\leq m<n^p}\left(a(m,n)+\frac{1}{(n-1)^2}\right)\\
=&\ n\sum_{m<n^p}a(m,n)+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right)n^p
\end{aligned}$$

$$= \quad nA(n^p, n) + \varphi_2(\frac{1}{n})n^p. \tag{7-13}$$

由 (7-12) 式和 (7-13) 式, 得

$$A(n^{p+1}, n) = npn^{p-1}\varphi_2(\frac{1}{n}) + \varphi_2(\frac{1}{n})n^p = (p+1)\varphi_2(\frac{1}{n})n^p.$$

所以, 当 $k = p+1$ 时命题成立. 于是完成了引理 7.7.1 的证明.

引理 7.7.2. $A(bn^k, n) = bkn^{k-1}\varphi_2(\frac{1}{n}) + \varphi_2(\frac{1}{b})n^k$, 其中 b 为自然数.

证明:

$$\begin{aligned}
& A(bn^k, n) = \sum_{m<bn^k} a(m,n) \\
= \quad & \sum_{m<n^k} a(m,n) + \sum_{n^k \le m < 2n^k} a(m,n) + \cdots + \sum_{(b-1)n^k \le m < bn^k} a(m,n) \\
= \quad & \sum_{m<n^k} a(m,n) + \sum_{0 \le m < n^k} a(m+n^k, n) + \cdots \\
& + \sum_{0 \le m < n^k} a(m+(b-1)n^k, n) \\
= \quad & \sum_{m<n^k} a(m,n) + \sum_{0 \le m < n^k} \left(a(m,n) + \frac{1}{1^2}\right) + \cdots \\
& + \sum_{0 \le m < n^k} \left(a(m,n) + \frac{1}{(b-1)^2}\right) \\
= \quad & b\sum_{m<n^k} a(m,n) + \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(b-1)^2}\right) n^k \\
= \quad & bA(n^k, n) + \varphi_2(\frac{1}{b})n^k. \qquad (7\text{-}14)
\end{aligned}$$

由 (7-11) 式和 (7-14) 式, 得

$$A(bn^k, n) = bkn^{k-1}\varphi_2(\frac{1}{n}) + \varphi_2(\frac{1}{b})n^k. \tag{7-15}$$

于是完成了引理 7.7.2 的证明.

定理的证明:

$$
\begin{aligned}
& A(N,n) = \sum_{m<N} a(m,n) \\
= & \sum_{m<a_1n^{k_1}} a(m,n) + \sum_{a_1n^{k_1}\le m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}} a(m,n) + \cdots \\
& + \sum_{N-a_sn^{k_s}\le m<N} a(m,n) \\
= & \sum_{m<a_1n^{k_1}} a(m,n) + \sum_{0\le m<a_2n^{k_2}} \left(a(m,n) + \frac{1}{a_1^2}\right) + \cdots \\
& + \sum_{0\le m<a_sn^{k_s}} \left(a(m,n) + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{a_i^2}\right) \\
= & \sum_{i=1}^{s} A(a_in^{k_i},n) + \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{a_j^2}\right) a_in^{k_i}. \qquad (7\text{-}16)
\end{aligned}
$$

由 (7-15) 式和 (7-16) 式, 得

$$
\begin{aligned}
A(N,n) &= \sum_{i=1}^{s} \left[a_ik_in^{k_i-1}\varphi_2(\frac{1}{n}) + \varphi_2(\frac{1}{a_i})n^{k_i}\right] + \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{a_j^2}\right) a_in^{k_i} \\
&= \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{a_ik_i\varphi_2(\frac{1}{n})}{n} + \varphi_2(\frac{1}{a_i}) + \left(a_i\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{a_j^2}\right)\right] n^{k_i}.
\end{aligned}
$$

于是完成了定理的证明.

参考文献

[1] F. Smarandache, Only Problems, Not Solutions, Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Liu Yaming, On the solutions of an equation involving the Smarandache function, Scientia Magna, **2**(2006), No. 1, 76-79.

[3] 徐哲峰, Smarandache 函数的值分布, 数学学报, **49**(2006), No. 5, 1009-1012.

[4] Le Mohua, A lower bound for $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$, Smarandache Notions Journal, **12**(2001), No. 1-2-3, 217-218.

[5] 苏娟丽, 关于 Smarandache 函数的一个下界估计, 纺织高校基础科学学报, **22**(2009), No. 1, 133-134.

[6] 苏娟丽, 关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计, 纯粹数学与应用数学, **24**(2008), No. 4, 706-708.

[7] Wang Jinrui, On the Smarandache function and the Fermat numbers, Scientia Magna, **4**(2008), No. 2, 25-28.

[8] Tom. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, New York: Springer-Verlag, 1976.

[9] 张文鹏, 初等数论, 陕西师范大学出版社, 西安, 2007.

[10] 温田丁, Smarandache 函数的一个下界估计, 纯粹数学与应用数学, **26**(2010), No. 3, 413-416.

[11] 朱敏慧, 关于 Smarandache 函数与费尔马数, 西北大学学报 (自然科学版), **40**(2010), No. 4, 583-585.

[12] J. Sándor and F. Luca, On $S(n!+1)$, where S is the Smarandache function, Octogon Math. Mag., **16**(2008), No. 2, 1024-1026.

[13] C. L. Stewart, On the greatest and least prime factors of $n!+1$, II, Publ. Math. Debrecen, **65**(2004), No. 3-4, 461-480.

[14] M. Murthy and S. Wong, The abc-conjecture and prime divisors of the Lucas and Lehmer sequences, Peters, K., Number theory theory for the millenium III, Natick, MA, 2002, 43-54.

[15] J. Oesterlé, Nouvelles approaches du Théoréme Fermat, Sem. Bourbaki, 1987/1988, No. 694, 1-21.

[16] D. W. Masser, Open problems, Analytic number theory, London: Imperial College, 1995, 27-35.

[17] R. K. Guy, Unsolved problems in number theory, third edition, New York: Springer Verlag, 2004.

[18] P. Erdös and C. L. Stewart, On the greatest and least prime factors of $n!+1$, J. London Math. Soc., **13**(1976), No. 4, 513-519.

[19] J. Sándor, On certain new inequalities and limits for the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, **9**(1998), No. 1-2, 63-69.

[20] 屠规彰, 组合记数方法及其应用, 北京: 科学出版社, 1981.

[21] Chen Jianbin, Value distribution of the F. Smarandache LCM function, Scientia

Magna, **3**(2007), No. 2, 15-18.
[22] Le Maohua, Two function equations, Smarandache Notions Journal, **14**(2004), No. 1-3, 180-182.
[23] 赵院娥, 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差均值, 纯粹数学与应用数学, **24**(2008), No. 1, 71-74.
[24] Lu Zhongtian, On the F. Smarandache LCM function and its mean value, Scientia Magna, **3**(2007), No. 1, 22-25.
[25] Ge Jian, Mean value of the F. Smarandache LCM function, Scientia Magna, **3**(2007), No. 2, 109-112.
[26] 闫晓霞, Smarandache LCM 函数与其对偶函数的混合均值, 内蒙古师范大学学报 (自然科学汉文版), **39**(2010), No. 3, 229-231.
[27] 潘承洞, 潘承彪, 素数定理的初等证明, 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
[28] 闫晓霞, Smarandache LCM 的对偶函数与最小素因子函数的均方值, 纺织高校基础科学学报, **23**(2010), No. 3, 323-325.
[29] 陈国慧, 一个包含新的 Smarandache 函数的方程, 数学的实践与认识, **40**(2010), No. 11, 206-210.
[30] 杨明顺, 关于 Smarandache 函数及 Smarandache LCM 函数的混合均值, 西北大学学报 (自然科学版), **40**(2010), No. 5, 772-773.
[31] 陈国慧, 一个包含算数函数 $S(d)$ 和 $SL(d)$ 的方程, 西北大学学报 (自然科学版), **40**(2010), No. 3, 382-384.
[32] http://www.fs.gallup.unm.edu/mathematics.htm.
[33] http://www.gallup.unm.edu/∼smarandache/Smarandacheials.htm.
[34] 王建平, 一类包含 Smarandache 和函数的 Dirichlet 级数, 陕西师范大学学报 (自然科学版), **38**(2010), No. 5, 14-17.
[35] C. H. Zhong, A sum related to a class arithmetical functions, Utilitas Math., 44(1993), 231-242.
[36] H. N. Shapiro, Introduction to the theory of numbers, John Wiley and Sons, 1983.
[37] M. L. Perez, Florent Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number theory and Geometry, Chicago: Xiquan Publishing House, 2000.
[38] Liu Hongyan and Zhang Wenpeng, On the simple numbers and its mean value properties, Smarandache Notions Journal, **14**(2004), 171-175.
[39] Zhu Weiyi, On the divisor product sequences, Smarandache Notions Journal, **14**(2004), 144-146.
[40] Kenichiro Kashihara, Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems, USA: Erhus University Press, 1996.
[41] 苟素, 关于 $SSSP(n)$ 和 $SISP(n)$ 的均值, 纯粹数学与应用数学, **25**(2009), No. 3, 431-434.
[42] 李粉菊, Smarandache 平方数列 $SP(n)$ 和 $IP(n)$ 的均值差, 纯粹数学与应用数学, **26**(2010), No. 1, 69-71.
[43] Lu Xiaoping, On the F. Smarandache $3n$-digital sequence, Research on Number Theory and Smarandache Notions, edited by Zhang Wenpeng, USA: Hexis, 2009, 5-7.
[44] Wu Nan, On the Smarandache $3n$-digital sequence and the Wenpeng Zhang's

conjecture, Scientia Magna, **4**(2008), No. 4, 120-122.

[45] Yang Ming, The conjecture of Wenpeng Zhang with respect to the Smarandache $3n$-digital sequence, Research on Number Theory and Smarandache Notions, edited by Zhang Wenpeng, USA: Hexis, 2010, 57-61.

[46] 李彩娟, 一个包含两个 Smarandache 函数的方程及其正整数解, 黑龙江大学自然科学学报, **27**(2010), No. 4, 446-448.

[47] Wu Xin, An equation involving the Pseudo-Smarandache function and F. Smarandache LCM function, Scientia Magna, **5**(2009), No. 4, 41-46.

[48] 李玲, 姚维利, 一类包含 Smarandache 函数与伪 Smarandache 函数的方程及其正整数解, 四川师范大学学报 (自然科学版), **33**(2010), No. 2, 200-202.

[49] Murthy A., Smarandache reciprocal function and an elementary inequality, Smarandache Notions Journal, **11**(2000), 312-315.

[50] J. Sándor, On certain arithmetic function, Smarandache Notions Journal, **12**(2001), 260-261.

[51] J. Sándor, On a dual of the Pseudo Smarandache function, Smarandache Notions Journal, **13**(2002), 18-23.

[52] 张文鹏, 关于 F. Smarandache 函数的两个问题, 西北大学学报, **38**(2008), No. 2, 173-175.

[53] Wang Yongxing, Some identities involving the Smarandache ceil function, Scientia Magna, **2**(2006), No. 1, 45-49.

[54] Lu Yaming, On a dual function of the Smarandache ceil function, Research on Smarandache problems in number theory, edited by Zhang Wenpeng, USA: Hexis, 2005, 55-57.

[55] Ding Liping, On the mean value of the Smarandache ceil function, Scientia Magna, **2**(2005), No. 1, 74-77.

[56] Zhang Wenpeng, On an equation of Smarandache and its integer solutions, Smarandache Notions, **13**(2002), 176-178.

[57] 复旦大学数学系, 数学分析, 北京: 高等教育出版社, 1983.

[58] 刘燕妮, 一个包含 Smarandache 函数的方程, 西北大学学报 (自然科学版), **37**(2007), No. 2, 197-198.

[59] 郭晓燕, 关于 Smarandache 问题的一个推广, 西北大学学报 (自然科学版), **40**(2010), No. 1, 9-10.

[60] 郭晓燕, 一个算术函数与最大素因子函数的混合均值, 陕西师范大学学报 (自然科学版), **38**(2010), No. 2, 12-14.

[61] Russo F., An introduction to the Smarandache square complementary function, Smarandache Notions Journal, **13**(2002), No. 1-2-3, 160-172.

[62] 樊旭辉, 关于平方补函数 $SSC(n)$ 的两个问题, 云南农业大学学报, **25**(2010), No. 3, 436-437.

[63] 徐哲峰, Smarandache 幂函数的均值, 数学学报, **49**(2006), No. 1, 77-80.

[64] Zhou Huanqin, An infinite series involving the Smarandache power function $SP(n)$, Scientia Magna, **3**(2006), No. 2, 109-112.

[65] Tian C. and Li X., On the Smarandache power function and Euler totient function, Scientia Magna, **4**(2008), No. 1, 35-38.

[66] 潘承洞, 潘承彪, 解析数论基础, 北京: 科学出版社, 1999.

[67] 任鹏, 王阳, 邓书显, 关于 Smarandache 幂函数的注记, 科技导报, **28**(2010), No. 17, 50-53.

[68] J. Sándor, On additive analogue of certain arithmetic function, Smarandache Notions Journal, **14**(2004), 128-132.

[69] Le Maohua, Some problems concerning the Smarandache square complementary function, Smarandache Notions Journal, **14**(2004), No. 1-3, 220-222.

[70] Zhu Minhui, The additive analogue of Smarandache simple function, Research on Smarandache problems in number theory, edited by Zhang Wenpeng, USA: Hexis, 2004, 39-40.

[71] 冀永强, 数论函数及其方程, 纺织高校基础科学学报, **19**(2006), No. 1, 5-6.

[72] 朱敏慧, 关于 F. Smarandache 函数的一个问题, 江西科学, **27**(2009), No. 3, 337-338.

[73] 朱敏慧, 关于 F. Smarandache 简单函数与 Dirichlet 除数和函数的混合均值, 内蒙古师范大学学报 (自然科学汉文版), **39**(2010), No. 5, 441-443.

[74] Xu Zhefeng, On additive k-power complements, Research on Smarandache problems in number theory, edited by Zhang Wenpeng, USA: Hexis, 2004, 11-14.

[75] 杨存典, 刘端森, 李军庄, 关于 k 次加法补函数的因子函数的均值公式, 纯粹数学与应用数学, **23**(2007), No. 3, 347-350.

[76] Liu Hongyan, Liu Yuanbing, A note on the 29th Smarandache problem, Smarandache Notions Journal, **14**(2004), No. 1-3, 156-158.

[77] Hardy G. H., Ranlnanujan S., The normal number of prime factors of a number n, Quarterly Journal Mathematics, **48**(1917), 78-92.

[78] 黄炜, 张转让, k 次减法补数的因子函数均值的渐近公式, 海南大学学报自然科学版, **28**(2010), No. 1, 11-13.

[79] 尚松叶, 一个包含 Gauss 取整函数方程的实数解, 郑州大学学报, **40**(2008), No. 4, 15-18.

[80] 王锦瑞, 秦玮, 一个包含 Gauss 函数方的程及其实数解, 高师理科学刊, **30**(2008), No. 2, 9-11.

[81] 杨倩丽, 李海龙, 关于 n 进制中数字之和函数均值的计算, 西北大学学报 (自然科学版), **32**(2002), No. 4, 361-366.

[82] 王阳, 关于 n 进制中数字和函数的三次均值, 纺织高校基础科学学报, **14**(2001), No. 4, 286-288.

[83] 杨倩丽, 李海龙, 关于 n 进制及其有关计算函数, 纯粹数学与应用数学, **18**(2002), No. 3, 13-15.

[84] 杨倩丽, 行敏, n 进制中非零数字倒数平方和函数均值, 内蒙古师范大学学报 (自然科学汉文版), **39**(2010), No. 3, 226-228.

[85] 潘承洞, 潘承彪，初等数论, 北京: 科学出版社, 1999.

New Progress on Smarandache Problems Research

Guo Xiaoyan

Department of Mathematics,

Northwest University,

Xi'an, Shaanxi, 710127, P. R. China

Yuan Xia

Department of Mathematics,

Northwest University,

Xi'an, Shaanxi, 710127, P. R. China

High American Press

2010

责任编辑：王婷婷
封面设计：刘燕妮

本书主要将目前国内学者关于Smarandache问题研究的部分成果汇编成册，其主要目的在于向读者介绍关于Smarandache问题的一些最新的研究成果，主要包括Smarandache函数的有界性估计、均值估计，特殊数列，特殊函数方程的解等一系列问题。希望有兴趣的读者可以对这些结论和新问题进行研究，从而开拓读者的视野，引导和激发读者对这些领域的研究兴趣。

This book includes part of the research results of current domestic scholars on Smarandache problems, and its main purpose is to introduce the latest results about Smarandache problems, including the bound estimate and the mean value estimate of the Smarandache functions, special sequence, and the solutions of special equations. We hope that the readers who are interested in this subject could do some research on these issues. At the same time, this book could open up the readers perspective, guide and inspire the readers to these fields.

ISBN 1-59973-096-0
53995>
9 781599 730967